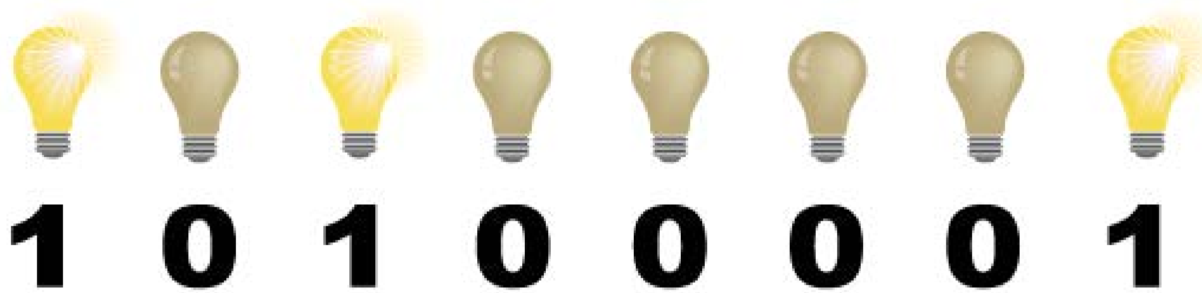
# 第02章  數字系統與資料表示法

# 電腦的基本單位

- 電腦，顧名思義，它必須是有**電**才有**腦**的，它是由許多電子電路所組合而成，它以1代表開，而以0代表關。
- 對於任一條電路，它只能有導電**1**或不導電**0**兩種狀況，這也構成了電腦的基本單位，我們稱它為位元(Bit)，而這種只有0或1兩種狀態的系統就叫二進位系統(binary system)。




二進位系統

# 電腦的基本單位

- 在日常生活中，我們習慣於使用**十進位**
(由0、1、2至9所組成，逢10就進位)。

舉例而言，若班上有52位同學，使用十進位只要二位數就夠了，因為十進位的二位數可代表0到99，共有100種狀況。

而在電腦中呢?
因為它使用二進位(由0至1所組成，逢2就進位)，故一位數只能代表兩種狀況，二位數只能代表四種狀況：00、01、10、11

所以，班上有52位同學，若要用二進位來編座號，那至少得要有六位數才夠。

# 電腦的基本單位

現在請看看您的鍵盤，鍵盤上的**A~Z**共有二十六個字元，小寫的**a~z**又有二十六個字元，**0~9**有十個字元，再加上特殊符號**(! @ # % & ***…等)就超過九十三個字元了。而您在鍵盤所按下的每個字元都得是不同的代碼，電腦才能得以識別。

例如以**ASCII**碼來說，您按下”**A**”，它將傳送01000001的訊息至主記憶體中，而後在螢幕上顯示”**A**”。

如果是”B”呢? 它傳達的訊息是01000010。

所以，電腦的基本單位是**位元(Bit)**，但一個位元只能代表兩種狀況根本不敷使用，所以它將8個位元，組成一個**位元組(byte)**。

**8位元(bit)=1位元組(byte)**

因為一個位元組(8 bit)共有$2^8$=256 種狀況，已足以代表鍵盤上的任一按鍵及功能鍵了。

# 電腦的基本單位

- 對於使用英文的國家而言，都是由大小寫的**A~Z**所組成的。但對於中文呢? 教育部編地的常用字有4800字，次常用字有7652字，再加上不常用字共有13053字，區區的一個位元組怎夠用呢?如果使用兩個位元組呢?

$$2^8 \times 2^8 = 65536$$

- 兩個位元組共有65536種狀況，已足以代表任一中文字了，故一個中文字是由兩個位元組所組成的。
- 所以，電腦的基本單位是位元(Bit)；而一個位元組(8 bit)能代表任一字元(character)，亦即字元、數字或特殊符號；而對於中文字則須以兩個位元組來儲存。

# 電腦的基本單位

時至今日，電腦的儲存容量是相當大的，因為一個Byte只能代表一個小量的資訊，所以電腦記憶體和儲存媒體的容量通常以千位元組(1,024 byte)，百萬位元組(1,048,576 byte)，或十億位元組(1,073,741,824 byte)來表示。故byte的縮寫為大寫的**B**，若為小寫的**b**則是bit的意思。一個中文字需**2** bytes來表示，若以60G的硬碟而言，約可容納300億個中文字，600億個英文字，因此要放入整個圖書館的資料是輕而易舉的事。

| 資料儲存單位轉換表 | | | |
|---|---|---|---|
| 英文名稱 | 中文名稱 | 單　位 | 附　註 |
| bit | 位元 | 0或1 | 最小單位 |
| byte | 位元組 | 8bits | 1byte=8bits |
| KB | 千位元組 | $2^{10}$bytes=1024bytes | 1024個位元組 |
| MB | 百萬位元組 | $2^{10}$KB=1024KB | 1,048,576個位元組 |
| GB | 十億位元組 | $2^{10}$MB=1024MB | 1,073,741,824個位元組 |

# 數字系統

- 在日常生活中，我們最常用的數字系統是十進位的，也就是以0、1、2~9共十個數字來作為計數的**基底**(base)，逢10就進位了。但也有使用其他進制的，例如一斤有16兩，一兩有16錢，這就使用16進位系統。

  而時間呢? 一小時有60分鐘，一分有60秒，這就是60進位系統了。

- 對於電腦呢? 它的基本單位是位元(bit)，只能代表0或1兩種符號，所以它使用的是二進位系統，也就是說它只能有0與1二個數字，逢2就進位了。

# 數字系統

- 請看底下的十進制吧!

| 5 | 0 | 2 | 8 | . | 7 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ | | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ |

$$5028.73=5\times10^{3}+0\times10^{2}+2\times10^{1}+8\times10^{0}+7\times10^{-1}+3\times10^{-2}$$

$$=5000+20+8+0.7+0.03$$

$$=5028.73$$

其中的5是千位數，故得乘上10的3次方；而2為十位數，故乘上10的1次方；8為個位數，於是乘上10的0次方，小數點以後的呢?它即由左而右依次為10的-1次方、10的-2次方…

方才說過，日常生活中我們最常使用十進制，這也就有如以下的問題：

# 數字系統

**3斤11兩，要怎麼算出共有幾兩呢?**

它的計算方法如下:

$$3斤11兩 = 3 \times 16^{1} + 11 \times 16^{0}$$

$$= 48 + 11$$

$$= 59$$

它一共有59兩

# 數字系統

**又如3小時24分12秒，要怎麼算出一共有幾秒呢?**

請看如下的計算方法：

$$3\text{小時}24\text{分}12\text{秒}=3\times60^2+24\times60^1+12\times60^0$$

$$=10800+1440+12$$

$$=12252$$

答案是12252秒

# 數字系統

- **接下來的問題，二進位的101011是十進位的多少呢?**

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

$$101011_2 = 1x2^5 x0x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$$

$$= 32+0+8+0+2+1$$

$$= 43$$

答案是十進位的 43

現在您已了解如何將二進位轉換成十進位了吧! 而為什麼您要了解如何將二進位轉換為十進位呢?因為電腦只懂得二進位，而我們習慣看的是十進位，故電腦得將最終的答案由二進位轉換成十進位於螢幕上秀出給您看，它的原理就是如此!

# 數字系統

- 反過來，您要如何將十進制轉換為二進制呢? 當您要將十進位的數字轉換乘二進位時，只要將該十進制的值一直除以2，求出它的餘數，直至商小於除數即可。

2 | 43

2 | 21 ……… 1 (43除以2的餘數)

2 | 10 ……… 1 (21除以2的餘數)

2 | 5 ……… 0 (10除以2的餘數)

2 | 2 ……… 1 ( 5 除以2的餘數)

1 ……… 0 ( 2 除以2的餘數)

例如本例即除至商為1(已小於除數的2)最後，您只要寫下商值，再將餘數由下至上，一次寫下即得如下的二進位數值 **1 0 1 0 1 1**

# 八進位系統

- **請看底下的二進位數值：**

**1 0 0 0 1 1 1 1 0 1**

有問題了吧! 您只看到一堆0與1，但還要解讀共有幾個0幾個1、以及前後順序為何，這根本是個難題! 所以，為了方便閱讀或記憶，人們想出了各種不同的速記法，來取代二進制系統，這其中以**八進位系統**(octal system)與**十六進位系統**(hexade cimal system)最為普遍，也最方便轉換。

八進位以0、1、2~7，共八個數字來做為基底，逢8就進位，所以在八進位系統中，您只能看到0~7的八個數字。

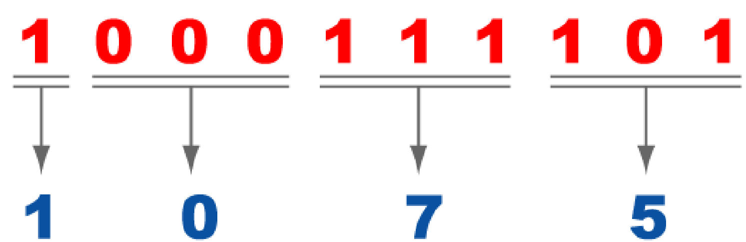
為何二進位與八進位容易轉換呢?因為二進位的3位數正好等於八進位的1位數($2^3$=8)，故只要將二進位的值由右至左，每3位取成一單位就可直接轉換成八近位了。

請看下表：

# 八進位系統

- 二進位的000至111轉換成八進位正好是0~7。

  故：




| 二進位 | 八進位 |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 2 |
| 0 1 1 | 3 |
| 1 0 0 | 4 |
| 1 0 1 | 5 |
| 1 1 0 | 6 |
| 1 1 1 | 7 |

您看! 二進位的1000111101轉換成八進位是**1075**。

這又是個問題了，如果您先寫出**1075**，又如何判別這是十進位或八進位呢?

在數字的表示法中，我們將基底至於數字的右下角，以示出它是哪種進位系統!

例如$\mathbf{1075_8}$代表是八進位制的，而$\mathbf{1075_{10}}$或**1075** (未標示基底)則代表為十進位制的，通常我們習慣使用十進位制，故未標示基底時，就表示為十進位制。

# 十六進位系統

| 十進位 | 二進位 | 十六進位 |
|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 |
| 2 | 0010 | 2 |
| 3 | 0011 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |

- 就像一斤共有16兩一樣，十六進位系統是逢16才進位，所以它需要有能代表0、1、2~15的值，這十六個值必須是一位數的，阿拉伯數字的0、1~9一共才十個值，還少了六個，所以十六進位制就以A、B、C、D、E、F來代表10、11、12、13、14、15。

# 各種進位之間的轉換

- 前面曾經說過二進位與十進位之間的轉換，其實八進位、十六進位與十進位之間的轉換也是相同的做法，只是其基底不同而已。
- 底下即示範將十進位的125轉換成八進位：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | **125** | | |
| 8 | **15** | ……… | **5** (125除以8的餘數) |
| | **1** | ……… | **7** (125除以8的餘數) |

當您需要將十進位的數字轉換成八進位時，只要將該十進制的值，一再除以**8**求出它的餘數，直至商小於除數為止。

例如本例即除至商為**1**(已小於除數的**8**)，最後，您只要寫下商值，再將餘數由下至上一次寫下，即得該八進位數值：**1 7 5** $_8$

# 各種進位之間的轉換

- **如何在二進位、八進位與十六進位之間進行轉換呢?**

先前曾談到，二進位由右至左依序取3位可轉換成八進位，依序取4位可轉換成十六進位。故反過來，若要將八進位轉換成二進位，只要將八進位的每一位數轉換成3位數的二進位。

如果是十六進位呢?那只要將它每一位數轉換成4位數的二進位即可。

底下即示範將175的八進位轉換成二進位：

$$
\begin{array}{cccl}
1 & 7 & 5_8 & \cdots\text{八進位} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
001 & 111 & 101_2 & \cdots\text{二進位}
\end{array}
$$

由上述可知**$175_8$**為二進位的**$1111101_2$**，前置**0**是可以省略的。例如十進位的**069**就等於**69**。

# 各種進位之間的轉換

- 底下再示範將十六進位的23D 轉換為二進位：

$$2 \quad 3 \quad D_{16}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0010 \quad 0011 \quad 1101_{2}$$

由上述可知**23D$_8$**為二進位的**1000111101$_2$**。

同樣的，前置**0**是可以省略的。

# 各種進位之間的轉換

- **上面所談的都是整數之間的轉換，如果有小數呢?**

  底下即示範將含小數的二進位制轉換成十進制：

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & . & 1 & 0 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3}
\end{array}
$$

由上表得知

$$
\begin{aligned}
\mathbf{101101.101}_2 &= 1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3} \\
&= 32+0+8+4+1+0.5+0.125 \\
&= 45.625
\end{aligned}
$$

# 各種進位之間的轉換

- **反過來，若您要將十進位的45.625轉換成二進位呢？**

  它的處理步驟如下：

1. 首先請將十進制的值分開成整數部分與小數部分。例如**45.625**的整數部分為**45**，而小數部分為**0.625**。

2. 將整數部分轉換成二進制。
   這在前面已談過了，**45**轉換成二進制為**101101**。

3. 將小數部分轉換成二進制。
   整數部分要轉換成二進制要一直除以**2**，直至商小於**2**為止。
   反過來呢?小數部分要一直乘以**2**，取乘績的整數部分，直至小數部分為**0**或出現循環為止。

   請看以下示範：

# 各種進位之間的轉換

0.625 ← 小數部分

X 2

小數點後第1位 → 1.250 ← 再取小數部分

X 2

小數點後第2位 → 0.50 ← 再取其小數部分

X 2

小數點後第3位 → 1.00 ← 小數部分為0時即停止

故本例的小數部位為.101

4. 將整數部分與小數部分合併

本例的整數部分為**101101**　　小數部分為**.101**

故合併後為**101101.101**

# 各種進位之間的轉換

**什麼時候小數的部份會造成循環呢?**

底下即示範將十進位的21.6 轉換八進位。

它與轉換成二進位的做法完全相同，只是基底不同而已。

8 | 21

2 ………… 5(21除以8的餘數)

商已小於8

1. 將十進制的數字分成整數與小數二部分
   **21.6**的整數部分為**21**，而小數部分為**0.6**。
2. 將整數部分換成八進制。故**$21_{10}$**轉換成八進制為**$25_8$**
3. 將小數部分轉換成八進制
   整數部分需一直除以**8**，直至商小於**8**為止，反過來說呢?
   小數部分需一直乘以**8**，直至乘績的小數部分為**0**或造成循環為止。

# 各種進位之間的轉換

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.6 \quad \leftarrow \text{將小數部分乘以8} \\
\times & 8 \\
\hline
\text{小數點後第1位} \rightarrow & {\color{red}4}.8 \quad \leftarrow \text{取其小數部分乘以8} \\
\times & 8 \\
\hline
\text{小數點後第2位} \rightarrow & {\color{red}6}.4 \quad \leftarrow \text{取其小數部分乘以8} \\
\times & 8 \\
\hline
\text{小數點後第3位} \rightarrow & {\color{red}3}.2 \quad \leftarrow \text{取其小數部分乘以8} \\
\times & 8 \\
\hline
\text{小數點後第4位} \rightarrow & {\color{red}1}.6
\end{array}
$$

您看！又出現0.6了，它已造成循環

故本例的小數部份為 4631

4. 將整數部分與小數部份合併

本例的整數部分為**25**　　小數部分為**.4631**

故轉換後的八進位值為$\mathbf{25.\overline{4631}_8}$