臺北市立成功高中106學年度第二學期一年級第二次期中考　數學科　試題卷

一、填充題(每格6分，共84分。**所有答案請乘開算出來，不得以符號表示。**)

1. 將0，0，1，1，2，3六個數字排成一列，則共可排成___(A)___種相異的六位數。

2. 已知$m \in N$，且滿足$P_m^8 = 24 \cdot P_{m-2}^7$，則$m =$___(B)___。

3. 在$\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^6$的展開式中，常數項的係數為___(C)___。

4. 計算$C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + \cdots + C_{12}^{16} =$___(D)___。

5. 在120000的正因數中，為完全立方數者有___(E)___個。

6. 現有不同的三輛計程車，每輛最多可載乘客4人，超過4人屬違規，若不考慮座位的不同，則乘客6人搭乘時，不違規的搭乘方法有___(F)___種。(可以有空車)

7. 某圍棋社中，社員共有5位男生、4位女生，

 ①任選5人，則至少選中3位男生的情形有___(G)___種。

 ②若將社員均分成三組，則共有___(H)___種分法。

 ③若將社員均分成三組，且每組皆有男有女，則共有___(I)___種分法。

8. 虛擬貨幣正夯，老師將其代幣(相同的比特幣4枚，相同的瑞波幣2枚，乙太幣1枚，萊特幣1枚)當作獎品分給表現最優的三位同學，則每人至少得1枚之分法有___(J)___種。

9. 成功高中124班有甲、乙兩人競選模範生，開票結果甲得8票，乙得6票，且沒有廢票。按規定，開票過程須一一唱票，但自始至終甲都是一路領先，則這次唱票過程共有___(K)___種可能。

10. 李白在〈宣州謝朓樓餞別校書叔雲〉的詩中寫到「抽刀斷水水更流，舉杯消愁愁更愁。」今從其中七個文字〝舉杯消愁愁更愁〞

①任取(至少取 1 個字)，則其組合數有___(L)___種。

②全取作排列，〝舉、杯〞二個字不相鄰，且三個〝愁〞字也皆不相鄰之排法有___(M)___種。

③全取作排列，則〝消、愁〞二字不居首位，且〝更、愁〞二字不居末位之排法有___(N)___種。

二、計算證明題(共 16 分。請寫詳細過程，過於簡略不予計分)

1. 試證明：

$C_0^{10}\cdot C_6^6+C_1^{10}\cdot C_5^6+C_2^{10}\cdot C_4^6+C_3^{10}\cdot C_3^6+C_4^{10}\cdot C_2^6+C_5^{10}\cdot C_1^6+C_6^{10}\cdot C_0^6=C_6^{16}$ 。(6 分)

〔提示：可利用$(1+x)^{10}\cdot(1+x)^6=(1+x)^{16}$。〕

2. 已知$n\in N$，

(1)試證明：$C_1^n+2\cdot C_2^n+3\cdot C_3^n+\cdots+n\cdot C_n^n=n\cdot 2^{n-1}$。(6 分)

(2)若$50000<C_1^n+2\cdot C_2^n+3\cdot C_3^n+\cdots+n\cdot C_n^n<60000$，試求 n 之值。(4 分)

臺北市立成功高中 106 學年度第二學期一年級第二次期中考　數學科　參考答案

一、填充題(每格 6 分，共 84 分。所有答案請乘開算出來，不得以符號表示。)

A	B	C	D	E
120	6	1215	6182	6
F	G	H	I	J
690	81	280	180	633
K	L	M	N	
429	63	192	140	

二、計算證明題(共 16 分。請寫詳細過程，過於簡略不予計分)

1.

解法一：

$\because (1+x)^{10}\cdot(1+x)^{6}$

$=(C_0^{10}+C_1^{10}x+\cdots+C_{10}^{10}x^{10})\cdot(C_0^{6}+C_1^{6}x+\cdots+C_6^{6}x^{6})$ (2 分)

其展開式 x^6 項係數

$=C_0^{10}\cdot C_6^6+C_1^{10}\cdot C_5^6+C_2^{10}\cdot C_4^6+C_3^{10}\cdot C_3^6+C_4^{10}\cdot C_2^6+C_5^{10}\cdot C_1^6+C_6^{10}\cdot C_0^6$ (2 分)

又 $(1+x)^{16}$ 的展開式 x^6 項係數為 C_6^{16} (2 分)

故可得證 $C_6^{16}=C_0^{10}\cdot C_6^6+C_1^{10}\cdot C_5^6+C_2^{10}\cdot C_4^6+C_3^{10}\cdot C_3^6+C_4^{10}\cdot C_2^6+C_5^{10}\cdot C_1^6+C_6^{10}\cdot C_0^6$

解法二：

考慮情境 10 男 6 女任取 6 人的情形為 C_6^{16}，(2 分)

若討論男女的情形則有

0 男 6 女 $\Rightarrow C_0^{10}\cdot C_6^6$

1 男 5 女 $\Rightarrow C_1^{10}\cdot C_5^6$

2 男 4 女 $\Rightarrow C_2^{10}\cdot C_4^6$

3 男 3 女 $\Rightarrow C_3^{10}\cdot C_3^6$

4 男 2 女 $\Rightarrow C_4^{10}\cdot C_2^6$

5 男 1 女 $\Rightarrow C_5^{10}\cdot C_1^6$

6 男 0 女 $\Rightarrow C_6^{10}\cdot C_0^6$　故可得證 (4 分)

解法三：

將左式的值乘出來等於 8008(5 分)

右式的值等於 8008。(1 分)

則兩式相等

2.(1)

解法一：

令 $S=C_1^n+2\cdot C_2^n+3\cdot C_3^n+\cdots+(n-1)\cdot C_{n-1}^n+n\cdot C_n^n$

又 $S=C_{n-1}^n+2\cdot C_{n-2}^n+3\cdot C_{n-3}^n+\cdots+(n-1)\cdot C_1^n+n\cdot C_0^n$ (2 分)

兩式相加可得

$2S=n\cdot C_0^n+n\cdot C_1^n+n\cdot C_2^n+n\cdot C_3^n+\cdots+n\cdot C_{n-1}^n+n\cdot C_n^n$

$=n\cdot(C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n)$ (1 分)

$=n\cdot 2^n$ (2 分)

則 $S=n\cdot 2^{n-1}$(1 分)

解法二：

利用 $k\cdot C_k^n=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\cdot C_{k-1}^{n-1}$ (2 分)

$C_1^n+2\cdot C_2^n+3\cdot C_3^n+\cdots+(n-1)\cdot C_{n-1}^n+n\cdot C_n^n$

$=n\cdot C_0^{n-1}+n\cdot C_1^{n-1}+n\cdot C_2^{n-1}+\cdots+n\cdot C_{n-2}^{n-1}+n\cdot C_{n-1}^{n-1}$ (2 分)

$=n\cdot(C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+C_2^{n-1}+\cdots+C_{n-2}^{n-1}+C_{n-1}^{n-1})$

$=n\cdot 2^{n-1}$ (2 分)

解法三：

利用微分，

設 $f(x)=(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$ (2 分)

$\Rightarrow f'(x)=n\cdot(1+x)^{n-1}=C_1^n+2C_2^nx+3C_3^nx^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$(2 分)

$\Rightarrow f'(1)=n\cdot 2^{n-1}=C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+\cdots+nC_n^n$ (2 分)

(2)

利用(1)結果

所求 $50000<n\cdot 2^{n-1}<60000$

$\because 13\cdot 2^{12}=53118$

$\therefore$ n=13 (4 分)