臺北市立成功高中 105 學年度 第二學期三年級自然組 第一次期中考選修數學甲試題卷

一、是非題：正確的請畫「O」，錯誤的請畫「X」(每題 2 分，共 8 分)

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$，其中 m 是一個固定的實數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+100} = m$。

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = m$，其中 m 是一個固定的實數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

3. 若直線 L 為曲線 Γ ： $y=f(x)$ 的切線，則此直線 L 與曲線 Γ 必恰交於一點。

4. 函數 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 $x=1$ 處不可微。

二、填充題(每格 6 分，共 72 分)

1. 試求下列各小題的極限值，若極限值不存在，則回答「不存在」。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=$ __(A)__ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=$ __(B)__ 。

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^{10}-1}{x-2}=$ __(C)__ 。

2. 已知三次實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=2$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$，則 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{f(x)}{3x+1}=$ __(D)__ 。

3. 設 n 為正整數，方程式 $6^n\cdot x^2-(3^n+2^n)\cdot x+1=0$ 的兩根為 α_n 與 β_n，且 $\alpha_n>\beta_n$。試求

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=$ __(E)__ 。

4. 設 a 與 b 均為實數，若 $\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{3^2}+\dfrac{a}{3^3}-\dfrac{b}{3^4}+\cdots+\dfrac{a}{3^{2n-1}}-\dfrac{b}{3^{2n}}+\cdots=2$，則 $3a-b=$ __(F)__ 。

5. 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x\ge 1 \\ -ax^2+b & ,x<1 \end{cases}$，若 $f'(1)$ 存在，則數對 $(a,b)=$ __(G)__ 。

6. 已知函數 $f(x)=\dfrac{(2x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)}$ ，則 $f'(2)=$__(H)__ 。

7. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=3$ ， $f'(1)=4$ ，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-3h)-f(1+4h)}{-7h}=$__(I)__ 。

8. 若 $f(x)=(x^2+x-1)^5$ ，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=$__(J)__ 。

9. 平面上，已知點 $P(0,3)$ ，試求過 P 點且與函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 圖形相切的直線方程式為

__(K)__ 。(請以一般式 $ax+by+c=0$ 的形式表示)

10.試求 $f(x)=x^{100}$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式為__(L)__ 。

三、計算證明題(共 20 分)

1. 設[ ]表高斯符號，試利用夾擠定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\dfrac{n}{5}\right]}{n}$ 之值。**(10 分)**

2. 已知 $f(x)=3x+1$ ， $g(x)=5x^3+1$ ，試證明在 1 和 2 之間存在一實數 c，使得 $2^c\cdot f(c)=g(c)$ 。

(10 分)

臺 北 市 立 成 功 高 中 １ ０ ５ 學 年 度 第 二 學 期 三 年 級 自 然 組 第 一 次 期 中 考 選 修 數 學 甲 答 案 卷

參考答案

一、是非題：正確的請畫「**O**」，錯誤的請畫「**X**」**(**每題 **2** 分，共 **8** 分**)**

1.	**2.**	**3.**	**4.**
O	O	X	O

二、填充題：**(**每格 **6** 分，共 **72** 分**)**

(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	10	$-\frac{4}{9}$
(E)	**(F)**	**(G)**	**(H)**
$\frac{1}{2}$	16	$(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$	-3
(I)	**(J)**	**(K)**	**(L)**
4	190	$3x+y-3=0$ 或 $15x-4y+12=0$	$-100x-99$

三、計算證明題：請寫出詳細的計算過程，否則不予計分，並請標明題號**(**共 **20** 分**)**

1.

設 $\left[\frac{n}{5}\right]=k\in\mathbb{Z}$，則 $k\le\frac{n}{5}<k+1\Rightarrow\frac{n}{5}-1<k\le\frac{n}{5}$ (3 分)

$\Rightarrow\frac{1}{5}-\frac{1}{n}<\frac{k}{n}=\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{n}\le\frac{1}{5}$ (2 分)

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{5}-\frac{1}{n})=\frac{1}{5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}$ (2 分)

由夾擠定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{n}=\frac{1}{5}$ (3 分)

2.

令 $h(x)=2^x\cdot f(x)-g(x)=2^x\cdot(3x+1)-(5x^3+1)$ (2 分)

$\because$ 函數 2^x 、 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均為連續函數

$\therefore h(x)$ 為連續函數 (2 分)

又 $h(1)=2^1\cdot(3+1)-(5+1)=2>0$ ，

$h(2)=2^2\cdot(6+1)-(5\cdot8+1)=-13<0$ (2 分)

由勘根定理得

在 1 和 2 之間存在一實數 c，使得

$h(c)=0\Rightarrow2^c\cdot f(c)-g(c)=0$ ，即 $2^c\cdot f(c)=g(c)$ (4 分)