臺北市立成功高中 105 學年度第 2 學期高三社會組數學期中考題目卷

班級:__________ 座號:_____ 姓名:_______________

一、 單選題 (每題 6 分, 共 12 分)

1. 設 X 為一隨機變數, 且 X 的變異數 $Var(X)=3$, 則 $Var(-2X-3)=$

(A) 6 (B) -6 (C) 12 (D) -9 (E) 3

2. 丟 2 枚均勻銅板 5 次, 令 X 代表 5 次中出現 2 個正面的次數, 若隨機變數 X 的期望值為 $E(X)$, 變異數為 $Var(X)$, 則下列何者正確?

(A) $E(X)=\frac{5}{2}, Var(X)=\frac{15}{4}$ (B) $E(X)=\frac{5}{2}, Var(X)=\frac{15}{16}$ (C) $E(X)=\frac{5}{4}, Var(X)=\frac{15}{4}$
(D) $E(X)=\frac{5}{4}, Var(X)=\frac{15}{16}$ (E) $E(X)=\frac{5}{4}, Var(X)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

二、 複選題 (每題 6 分, 共 12 分, 錯一個選項扣 3 分, 扣完為止)

1. 設 $x>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5x^n+3}{2x^n+1}$ 之值可能為

(A) 3 (B) 0 (C) $\frac{8}{3}$ (D) ∞ (E) $\frac{5}{2}$

2. 設對於所有的自然數 n, $b_n=a_{2n}$ 且 $c_n=a_{2n-1}$, 試問下列無窮數列 $<a_n>, <b_n>, <c_n>$ 的敘述何者正確?

(A) 若 $<a_n>$ 收斂則 $<b_n>$ 收斂 (B) 若 $<a_n>$ 發散則 $<b_n>$ 發散
(C) 若 $<b_n>$ 收斂則 $<c_n>$ 收斂 (D) 若 $<b_n>$ 發散則 $<c_n>$ 發散
(E) 若 $<b_n>$ 收斂且 $<c_n>$ 收斂, 則 $<a_n>$ 收斂

三、 填充題 (每格 6 分, 共 66 分)

1. 試求下列各式的極限值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n+1}-\frac{n^2}{3n-1}=$ ___(1)___

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^n-1}-\frac{4^n}{2^n+1}=$ ___(2)___

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{3}-\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2})=$ ___(3)___

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{n+2}+an+b)=3$, 則 $a+b=$ ___(4)___。

3. 試求下列無窮等比級數的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \underline{\quad(5)\quad}$

(2) $0.77 + 0.0707 + 0.007007 + 0.00070007 + \cdots = \underline{\quad(6)\quad}$

4. a, b, c 為 1 至 9 之正整數, 且 a, b, c 成等差數列, 若 $0.\overline{a} + o.\overline{2b} = 0.\overline{3c}$, 則 $a + b + c = \underline{\quad(7)\quad}$

5. 箱中有相同大小的三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機抽出兩球。如果抽出的兩球顏色不同, 則得獎金 100 元; 如果兩球的顏色相同則無獎金。設隨機變數 X 表示自箱中隨機抽出兩球所得的金額, 則隨機變數 X 的期望值為 $\underline{\quad(8)\quad}$

6. 某百貨公司隨機抽 400 位顧客, 發現有 80 位顧客的消費金額在 20000 元以上, 則此百貨公司消費金額在 20000 元以上的顧客比例之 95% 信賴區間為 $\underline{\quad(9)\quad}$。

7. 已知阿明投籃命中率是 $\frac{7}{10}$, 如果阿明連續投籃 n 次, 至少一次進球的機率大於 0.99, 那麼 n 至少為 $\underline{\quad(10)\quad}$。($\log 7 = 0.8451$)

8. 有一隻小蟲在坐標平面上由原點出發, 牠第一次向右移動 1 單位, 到達 $P_1(1,0)$, 第二次向上移動 $\frac{2}{3}$ 單位, 到達 $P_2(1, \frac{2}{3})$, 之後皆依照先向右再向上的方式移動, 而且每次移動的距離都是前一次的 $\frac{2}{3}$, 如此依序移動, 則此小蟲移動到最後的極限位置之坐標為 $\underline{\quad(11)\quad}$。

四、 計算題 (共 10 分)

1. (1 分) 已知兩數列 $< a_n >$ 與 $< b_n >$ 之一般項 $a_n = 2^n$, $b_n = n^2$, 試猜測從哪一項開始 $a_n > b_n$。

2. (4 分) 承上題, 請證明你的結論。

3. (5 分) 請判斷數列 $< \frac{n}{2^n} >$ 是否收斂, 若此數列收斂, 試計算其極限。(必須完整說明理由才給分)

臺北市立成功高中 105 學年度第 2 學期高三社會組數學期中考答案卷

班級:__________ 座號:_____ 姓名:_______________

一、 單選題 (每題 6 分, 共 12 分)

1. C	2. D

二、 複選題 (每題 6 分, 共 12 分, 錯一個選項扣 3 分, 扣完為止)

1. ACE	2. A

三、 填充題 (每格 6 分, 共 66 分)

(1) $-\frac{2}{9}$	(2) 2	(3) $-\frac{1}{2}$	(4) 4
(5) $\frac{1}{12}$	(6) $\frac{28}{33}$	(7) 6	(8) 60
(9) $[0.16, 0.24]$	(10) 4	(11) $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$	

四、 計算證明題 (共 10 分)

詳見下頁

[計算題詳解]

(1) 代幾項觀察：$a_1 = 2^1 = 2$，$b_1 = 1^2 = 1$；$a_2 = 2^2 = 4$，$b_2 = 2^2 = 4$；$a_3 = 2^3 = 8$，$b_3 = 3^2 = 9$；$a_4 = 2^4 = 16$，$b_4 = 4^2 = 16$；$a_5 = 2^5 = 32$，$b_5 = 5^2 = 25$；$a_6 = 2^6 = 64$，$b_6 = 6^2 = 36$

猜測從**第 5 項**開始，$a_n > b_n$。 (1 分)

(2) 欲證明：對任意自然數 $n \geq 5$，$a_n > b_n$。

當 $n = 5$ 時，$a_5 = 32 > b_5 = 25$。 (1 分)

假設 $n = k \quad (k \geq 5)$時，結論成立，意即：$2^k > k^2$。 (1 分)

則當 $n = k + 1$ 時，$a_{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$

又 $2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k + 1 - 2 = (k-1)^2 - 2 \geq (5-1)^2 - 2 > 0$

可推得 $a_{k+1} = 2^{k+1} > (k+1)^2 = b_{k+1}$，亦成立。 (1 分)

因此，由**數學歸納法**得知：對所有自然數 $n \geq 5$，$a_n > b_n$ 均成立。 (1 分)

(3) **<法一>**

由(2)可知對所有自然數 $n \geq 5$，$2^n > n^2$ 均成立$\Rightarrow$所有自然數 $n \geq 5$，$0 \leq \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$ (2 分)

因為，$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (2 分)

所以，由**夾擠定理**得知數列〈$\dfrac{n}{2^n}$〉收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$。 (1 分)

<法二> 對所有自然數 n，$0 < \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n}{(1+1)^n} = \dfrac{n}{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots C_n^n} < \dfrac{n}{C_2^n} = \dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n-1}$ (2 分)

因為，$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n-1} = 0$ (2 分)

所以，由**夾擠定理**得知數列〈$\dfrac{n}{2^n}$〉收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$。 (1 分)