臺北市立成功高中 105學年度第一學期 高三自然組(306-323)數學第二次期中考試題

一、是非題：正確請打 O，錯誤請打 X(共 8 分。每題 2 分)

1. $\sin 2 > \sin 1 > \sin 3 > \sin 4$

2. $\sec 1 > \sec 3 > \sec 4 > \sec 2$

3. $y = \sin 2x$ 的圖形對稱於直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$

4. 函數 $f(x) = 3\tan 2x$ 的定義域為 $\left\{ x \in R \,\middle|\, x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

二、填充題：(共 72 分。每格全對得 6 分，其餘得 0 分)

1. 若複數 $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7} - 1$，則 z 的向徑為__(A)__， z 的主幅角為__(B)__。

2. 設 θ 為實數，若方程式 $x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)x - 1 = 0$ 有一根為 $2+\sqrt{3}$ ，則 $\sin\theta\cos\theta =$__(C)__。

3. 設 $-2\pi \le x \le 2\pi$ ，解方程式 $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ ，得 x 的解為__(D)__。

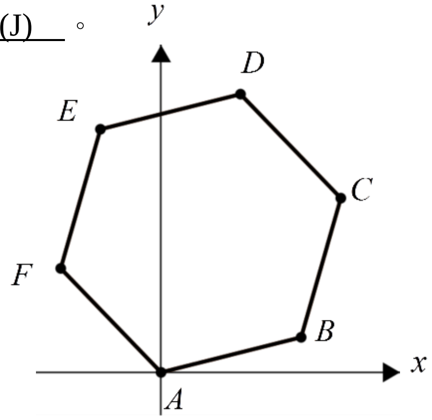
4. 設 $-2\pi < x < 2\pi$ ，方程式 $\tan x = x + 1$ 有__(E)__個實根。

5. 設函數 $f(x) = 12 - 5\sin x - 12\cos x$ ，且 $0 \le x \le \pi$ ，
(1) 若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M, m) =$__(F)__。
(2) 當 $x = \theta$ 時， $f(x)$ 有最小值 m，求數對 $(\cos\theta, \sin\theta) =$__(G)__。

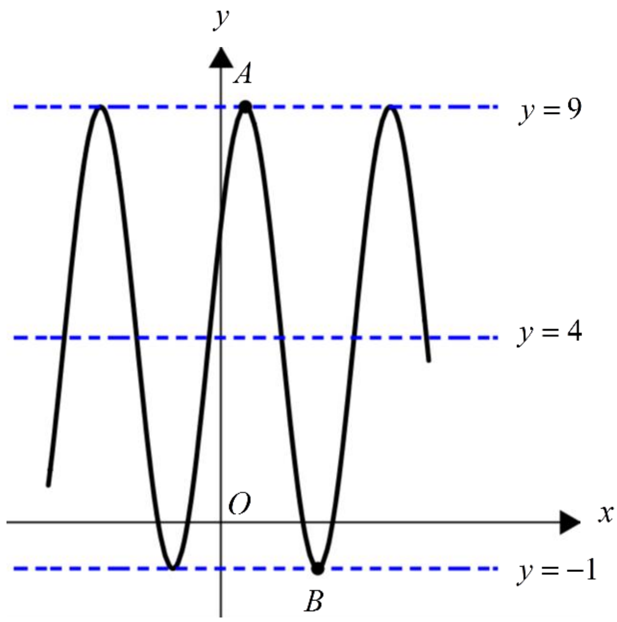
6. 平面上，已知 $A(-2,0)$ 、 $B(0,4)$ 為橢圓 Γ ： $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ 的兩頂點，若 P 為橢圓 Γ 上一點，則
當 P 點坐標為__(H)__時， ΔABP 的面積有最大值 =__(I)__。

7. 設 z 為複數，若 $|z+3i| = 2|z+4|$ 且 $Arg(\dfrac{z+3i}{z+4}) = \dfrac{\pi}{2}$ ，則 $z =$__(J)__。

8. 如右圖， $ABCDEF$ 為正六邊形，其中， $A(0,0)$ 、
$B(4,$ [illegible]，則 D 點之坐標為__(K)__。



9. 設$a>0$、$b>0$、$0\le c\le 2\pi$，若函數 $f(x)=a\sin(bx+c)+d$ 之部分圖形如右圖，其中$A(\frac{\pi}{9},9)$、$B(\frac{4\pi}{9},-1)$，則數對$(a,b,c,d)=$__(L)__。



三、計算證明題：(共 20 分)

1. 在$\tan\theta$有意義的情形下，試證明

$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$ (8 分)

2. 設函數 $f(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$，$x$為實數，

(1) 令$\sin x+\cos x=t$，試以t來表示 $f(x)$。 (4 分)

(2) 承(1)，試求t的範圍。 (4 分)

(3) 承(1)、(2)，試求 $f(x)$的最大值與最小值。 (4 分)

臺北市立成功高中 105學年度第一學期 高三自然組(306-323)數學第二次期中考答案

一、是非題：正確請打 O，錯誤請打 X (共 8 分。每題 2 分)

1.	2.	3.	4.
O	O	X	X

二、填充題：(共 72 分。每格全對得 6 分，其餘得 0 分)

(A)	(B)	(C)	(D)
$2\sin\frac{\pi}{7}$	$\frac{9\pi}{14}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$ 或 $-\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$
(E)	**(F)**	**(G)**	**(H)**
3	$(24,-1)$	$(\frac{12}{13},\frac{5}{13})$	$(\sqrt{2},-2\sqrt{2})$
(I)	**(J)**	**(K)**	**(L)**
$4+4\sqrt{2}$	$-2+i$	$(4-\sqrt{3},1+4\sqrt{3})$	$(5,3,\frac{\pi}{6},4)$

三、計算證明題：(共 20 分)

1.

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$

$$=\sin^2\theta(\frac{1}{\cos^2\theta}-1)$$

$$=\sin^2\theta(\sec^2\theta-1)$$

$$=\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta$$ 得證

(8 分)

2. (1) $t=\sin x+\cos x$

$$\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$f(x)=(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}$$

(4 分)

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\because -1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$ $\quad\therefore -\sqrt{2}\le t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$

(4 分)

(3) $f(x)=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$

當 $t=\sqrt{2}$ 時， $f(x)$ 有最大值 $=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2-1=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

當 $t=-1$ 時， $f(x)$ 有最小值 $=\frac{1}{2}(-1+1)^2-1=-1$

(4 分)