

# 臺北市立成功高級中學 105 學年度第一學期一年級數學科第二次期中考題目卷

※請勿使用計算紙和計算機(只能在題目卷上計算)

## 一、多重選擇題 (共 24 分, 每題 8 分, 答錯一選項得 5 分, 答錯兩選項得 2 分, 其餘得 0 分)

1. 設三次多項式  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ , 請問下列哪些選項正確?

(1) 若  $a,b,c,d$  為複數,  $i=\sqrt{-1}$ , 則方程式  $f(x)=0$  恰有三個複數根 (重根亦重複計算)

(2) 若  $a,b,c,d$  為實數,  $i=\sqrt{-1}$ , 且滿足  $f(4+3i)=0$ , 則  $f(4-3i)=0$

(3) 若  $a,b,c,d$  為有理數, 且滿足  $f(2+\sqrt[3]{5})=0$ , 則  $f(2-\sqrt[3]{5})=0$

(4) 若  $a,b,c,d$  為整數, 且滿足  $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ , 則 3 能整除  $a$  且 2 能整除  $d$

(5) 若  $a,b,c,d$  為正整數, 則方程式  $f(x)=0$  沒有正實數根

2. 設實係數三次多項式  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ , 部分的  $f(x)$  函數值正負如下表, 請問下列哪些選項正確?

$x$	$\leq -3$	$-2$	$-1$	$0$
$f(x)$ 的值	$-$	$+$	$-$	$-$

(例如: 根據上表,  $f(-4)<0$ ,  $f(-2)>0$ , ... 依此類推。)

(1) 方程式  $f(x)=0$  在  $-3<x<-2$  時恰有一實根

(2) 方程式  $f(x)=0$  在  $-2<x<-1$  時恰有一實根

(3) 方程式  $f(x)=0$  在  $-1<x<0$  時無實根

(4) 方程式  $f(x)=0$  恰有三實根

(5) 方程式  $f(x)=0$  恰有一正實根

3. 設多項式  $f(x)=x^{2017}+1$ , 請問下列哪些選項正確?

(1)  $f(x)$  除以  $x-1$  的餘式為 2

(2)  $f(x)$  除以  $x^2-1$  的餘式為 2

(3) 已知  $f(x)$  除以  $x^2+x+1$  的餘式為  $x+1$ , 則  $f(x)$  除以  $x^3-1$  的餘式為  $x+1$

(4) 利用  $f(x)$  可推得  $6^{2017}$  除以 35 的餘數為 6

(5) 利用  $f(x)$  可推得  $3^{2017}$  除以 26 的餘數為 4

## 二、填充題 (共 60 分, 每格 5 分, 完全答對才給分)

1. 設整係數方程式  $x^4+ax^3+bx^2+cx+14=0$  有四個相異有理根, 則  $a+b+c$  的值為\_\_\_\_\_

2. 設多項式  $f(x)$  除以  $x^2-x+1$  的餘式為  $5x-2$ , 試求  $(x-1)f(x)$  除以  $x^2-x+1$  的餘式為\_\_\_\_\_

3. 設  $f(x)=x^3+4x^2+9x-1$ , 若  $f(x)=a+b(x+1)+c(x+1)(x+2)+d(x+1)(x+2)(x+3)$ , 求  $(a,b,c,d)=$ \_\_\_\_\_

4. 已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(-3)=f(-2)=0$ ,  $f(-1)=2$ ,  $f(0)=54$ , 試求  $f(x)$  的各項係數總和為\_\_\_\_\_
5. 設  $f(x)=2x^2+15x+22$ , 試估計  $f(-2.99)$  的近似值為\_\_\_\_\_ (四捨五入至小數第二位)
6. 設實係數多項式  $f(x)=ax^3+bx$  滿足  $f(1-i)=3+4i$ , 其中  $i=\sqrt{-1}$ , 則  $f(i^2+i^3+\dots+i^{98}+i^{99})=$ \_\_\_\_\_
7. 設  $x$  是實數, 若不等式  $-2 < \frac{x}{2x-1} < -1$  的解為  $a < x < b$ , 求  $(a,b)=$ \_\_\_\_\_
8. 設  $f(x)=x^3-x^2+6x+k$ , 若  $f(1-2i)=-6i$ , 其中  $i=\sqrt{-1}$ , 試求實數  $k=$ \_\_\_\_\_
9. 設  $m$  為一實數, 若不等式  $\frac{4x^2-2mx+m}{3x^2-4x+2} > 1$  對所有實數  $x$  均成立, 則  $m$  的範圍為\_\_\_\_\_
10. 設  $a,b,c,d$  為四個相異實數且滿足

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

試利用多項式的恆等定理求出  $f(1)+f(2)+\dots+f(2016)+f(2017)$  的值為\_\_\_\_\_

11. 若  $\alpha, \beta$  為方程式  $x^2+8x+4=0$  之兩根, 則  $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$ \_\_\_\_\_
12. 設  $a$  為實數且方程式  $x^3+x^2+ax+1=0$  有純虛根, 則  $a=$ \_\_\_\_\_

### 三、計算題 (共 16 分, 每題 8 分, 請詳細在答案卷上書寫計算過程, 否則不予計分)

1. 設多項式  $f(x)=x^4-4x^3-6x^2+7x-10$ , 試回答下列問題:

(1) 請利用有理根檢驗法求出方程式  $f(x)=0$  的有理根 (4 分)

(2) 試求不等式  $\frac{f(x)}{(x+1)(x+2)(x^2+x+1)} \geq 0$  的解 (4 分)

2. 麥麥是個愛喝飲料的高中生, 有一天他將一瓶紅茶從冰箱拿出來退冰。因麥麥牙齒過敏, 不能喝太冰的飲料, 所以希望在飲用時, 紅茶的溫度至少為  $20^\circ\text{C}$  以上。故麥麥以「分鐘」為單位, 記錄退冰的時間  $x$  與對應的溫度  $y$  如下:

時間 $x$ (分鐘)	0	1	2	4
紅茶溫度 $y$ ( $^\circ\text{C}$ )	2	3	4	7

例如, 拿出來退冰 2 分鐘後, 紅茶的溫度為  $4^\circ\text{C}$ 。試回答下列問題:

- (1) 麥麥想利用此 4 筆資料做一個次數為 3 次的插值多項式  $f(x)$ , 用來模擬真實的溫度函數。請用拉格朗日插值法幫助

麥麥寫出  $f(x)$ , 使滿足  $f(0)=2$ ,  $f(1)=3$ ,  $f(2)=4$ ,  $f(4)=7$ 。不需展開, 答案請化簡至形式

$$a(x-h_1)(x-h_2)(x-h_3)+b(x-h_1)(x-h_2)(x-h_4)+c(x-h_1)(x-h_3)(x-h_4)+d(x-h_2)(x-h_3)(x-h_4). \quad (4 \text{ 分})$$

- (2) 試利用(1)中所求之多項式來估計, 拿出來退冰至少幾分鐘(整數)後, 麥麥就可以開始飲用紅茶?

(即滿足  $f(k-1) < 20 < f(k)$  的最小整數  $k$ ) (4 分)

臺北市立成功高級中學 105 學年度第一學期一年級數學科第二次期中考參考答案

班級：                      座號：                      姓名：

一、 多重選擇題（共 24 分，每題 8 分，答錯一選項得 5 分，答錯兩選項得 2 分，其餘得 0 分）

1.	2.	3.
125	12345	134

二、 填充題（共 60 分，每格 5 分，完全答對才給分）

1.	2.	3.	4.	5.	6.
-15	$-2x-3$	$(-7,4,-2,1)$	204	-4.97	$-3+4i$
7.	8.	9.	10.	11.	12.
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$	$k=2$	$2 < m < 3$	2017	-12	1

三、 計算題（共 16 分，每題 8 分，請詳細在答案卷上書寫計算過程，否則不予計分）

<p>1.</p> <p>(1) 有理根：-2, 5（每個解 2 分）</p> <p>(2) <math>x \geq 5 \vee x &lt; -1, x \neq -2</math>                  （只解出 <math>x \geq 5 \vee x &lt; -1</math> 得 3 分）</p> <p>（計算部分閱卷老師可自行斟酌給分）</p>	<p>2.</p> $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-4)$ $+ x(x-2)(x-4)$ $- x(x-1)(x-4)$ $+ \frac{7}{24}x(x-1)(x-2)$ <p>（每算對一個部分即給一分，共四個部分）</p> <p>(2) 8 分鐘後</p> <p>（計算部分閱卷老師可自行斟酌給分）</p>
---	---