

臺北市立成功高中 104 學年度第二學期高二第一次期中考數學試題

※請注意：題號前有標示「◎」記號者，第一類組(201~205)同學不必作答，第

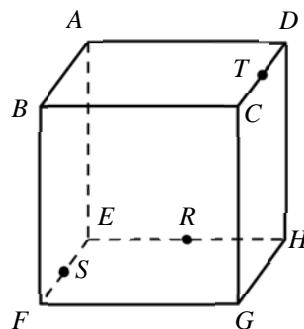
二、三類組(206~223)同學則全部題目都必須作答。

一、是非題：正確的請畫「O」，錯誤的請畫「X」

1. 空間中，若兩相異直線 L_1 與 L_2 均與直線 L 垂直，則 $L_1 // L_2$ 。
2. 空間中，若兩相異平面 E_1 與 E_2 均與平面 E 垂直，則 $E_1 // E_2$ 。
3. 空間中，相異三點恰可決定唯一的平面。

4. 正四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 。

5. 如右圖，已知正六面體 $ABCD-EFGH$ ， \overline{EF} 的中點為 S ， \overline{EH} 的中點為 R ， \overline{CD} 的中點為 T ，則 $\angle TRS = 90^\circ$ 。



◎6. 已知空間中不共面之四點 $ABCD$ ，則 $\overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \overline{AC} \cdot (\overline{AD} \times \overline{AB})$ 。

二、填充題：

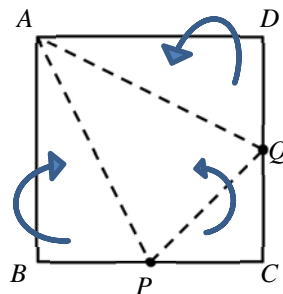
1. 設 $\vec{a} = (1, -2, 3)$ ， $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ ，則 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 的最小值為 (A)。

2. 已知空間中兩向量 \vec{a} 和 \vec{b} ，若 $\vec{a} \times \vec{b} = (3, 6, -6)$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ ，則 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角為 (B)。

3. 已知 $\triangle OAB$ 中， $|\overline{OA}| = 5$ ， $|\overline{OB}| = 7$ ，點 C 在線段 AB 上且 $\overline{OC} = \overline{OA} + t\overline{AB}$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ ，若 \overline{OC} 平分 $\angle AOB$ ，則 t 之值為 (C)。

4. 如圖，邊長為 4 的正方形 $ABCD$ 中， P 、 Q 分別為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，沿虛線向上摺，使 B 、 C 、 D 重合於 R ，形成四面體 $APQR$ ，試求四面體 $APQR$ 的體積為 (D)。

(四面體(錐體)體積 = $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高})$)



5. 已知空間坐標系中第一卦限內有一點 P ，若 P 到 x 軸、 y 軸、 xy 平面的距離分別為 5、 $\sqrt{17}$ 、4，則 P 點的坐標為 (E)。

6. 試求過空間中三點 $A(2,1,-1)$ 、 $B(1,2,1)$ 、 $C(1,1,3)$ 的平面方程式為 (F)。
7. 若平面 E 通過點 $(1,2,3)$ ，且 E 同時與 xy 平面、平面 $x+y+z=1$ 皆垂直，則此平面 E 的方程式為 (G)。
8. 若空間中一光線從點 $P(1,2,3)$ 射向平面 E 上的點 $(2,1,4)$ 後，往平面外點 $Q(4,3,6)$ 的方向反射，則平面 E 的方程式為 (H)。
9. 空間中，設 A 、 B 、 C 三點分別在 x 軸、 y 軸、 z 軸的正向上， O 為原點。若 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 且 $\overline{OD} = 3\overline{OC}$ ，則點 O 到平面 ABC 的距離與點 O 到平面 ABD 的距離比為 (I)。
10. 試求平面 $\sqrt{2}x + y + z = 1$ 與 xz 平面的銳夾角為 (J)。
11. 空間中已知兩點 $A(2,1,3)$ 、 $B(1,3,1)$ ，動點 P 在 xz 平面上，試求 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之最小值為 (K)；此時 P 點坐標為 (L)。

◎12. 行列式 $\begin{vmatrix} 200 & 201 & 202 \\ 26 & 24 & 25 \\ 53 & 51 & 52 \end{vmatrix}$ 之值為 (M)。

三、計算題：請寫出詳細的計算過程，否則不予計分，並請標明題號

1. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 5、6、7，若其內一點 P 到各邊之距離分別為 x 、 y 、 z ，則 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為何？

◎2. 已知 a 、 b 、 c 三數為方程式 $x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$ 的三根，試求 $\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix}$ 之值。

臺北市立成功高中 104 學年度第二學期高二第一次期中考數學答案

一、是非題：正確的請畫「O」，錯誤的請畫「X」(每題 2 分)(第二、三類組)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
X	X	X	O	O	O

二、填充題：(答對前 7 格，每格 6 分；答對第 8 格起，每格 5 分)

(A)	(B)	(C)	(D)
$\sqrt{14}$	30° 或 150°	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{3}$
(E)	(F)	(G)	(H)
(1,3,4)	$4x+2y+z-9=0$	$x-y+1=0$	$y-1=0$
(I)	(J)	(K)	(L)
$\sqrt{19} : 3\sqrt{3}$	60°	$\sqrt{21}$	$(\frac{7}{4}, 0, \frac{5}{2})$
(M)			
81			

三、計算題：請寫出詳細的計算過程，否則不予計分，並請標明題號

1. 如圖，

ΔABC 面積 = ΔPAB 面積 + ΔPBC 面積 + ΔPCA 面積

$$\Rightarrow \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot z$$

$$\Rightarrow 5x + 6y + 7z = 12\sqrt{6} \quad (4 \text{ 分})$$

由柯西不等式得 $(x^2 + y^2 + z^2)(5^2 + 6^2 + 7^2) \geq (5x + 6y + 7z)^2$
(2 分)

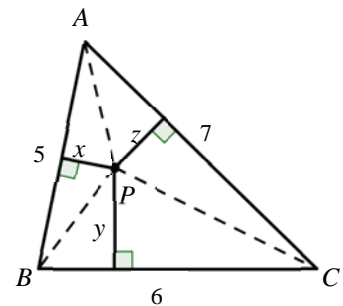
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{432}{55} \quad \therefore x^2 + y^2 + z^2 \text{ 的最小值為 } \frac{432}{55} \quad (2 \text{ 分})$$

2. $\therefore a, b, c$ 為 $x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$ 的三根 $\therefore a+b+c = -2, ab+bc+ca = 3, abc = 5$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-c & b & c \\ -2-a & c & a \\ -2-b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & b & c \\ -2 & c & a \\ -2 & a & b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= -2(bc + ca + ab - c^2 - a^2 - b^2) = -2 \cdot 3 + 2[(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)]$$

$$= -6 + 2[4 - 2 \cdot 3] = -10 \quad (8 \text{ 分；部分錯誤者請老師自行斟酌給分})$$



臺北市立成功高中 104 學年度第二學期高二第一次期中考數學答案

(第一類組)

一、是非題：正確的請畫「O」，錯誤的請畫「X」(每題 2 分)

1.	2.	3.	4.	5.	◎6.
X	X	X	O	O	

二、填充題：(答對前 6 格，每格 7 分；答對第 7 格起，每格 6 分)

(A)	(B)	(C)	(D)
$\sqrt{14}$	30° 或 150°	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{3}$
(E)	(F)	(G)	(H)
(1,3,4)	$4x+2y+z-9=0$	$x-y+1=0$	$y-1=0$
(I)	(J)	(K)	(L)
$\sqrt{19} : 3\sqrt{3}$	60°	$\sqrt{21}$	$(\frac{7}{4}, 0, \frac{5}{2})$
◎(M)			

三、計算題：請寫出詳細的計算過程，否則不予計分，並請標明題號(12 分)

1. 如圖，

ΔABC 面積 = ΔPAB 面積 + ΔPBC 面積 + ΔPCA 面積

$$\Rightarrow \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot z$$

$$\Rightarrow 5x + 6y + 7z = 12\sqrt{6} \quad (5 \text{ 分})$$

由柯西不等式得 $(x^2 + y^2 + z^2)(5^2 + 6^2 + 7^2) \geq (5x + 6y + 7z)^2$

(4 分)

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{432}{55} \quad \therefore x^2 + y^2 + z^2 \text{ 的最小值為 } \frac{432}{55} \quad (3 \text{ 分})$$