台北市立成功高中104學年度第2學期三年級數學科(自然組)第1次期中考試題卷 P1

一、多選題：(每題5分，共4題．)(每題至少有一個正確選項．每題全對得5分，錯一個選項得3分，其餘0分．)

1. 下列哪些選項是正確的？

(1) 循環小數$2.\overline{9}<3$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<2$　(3) 若$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ a\in\mathbb{R}$，則$\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$．

(4) 設$\lim_{n\to\infty}a_n=L,\ \lim_{n\to\infty}b_n=M,\ L\in\mathbb{R},\ M\in\mathbb{R}$．若$n\ge 2016$時，不等式$a_n<b_n$恆成立，則$L<M$．

(5) 若無窮數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$均為發散數列，則無窮數列$\langle a_n\cdot b_n\rangle$必發散．

2. 選出極限存在的選項：

(1) $\lim_{x\to4}\frac{(x-4)^2}{|x-4|}$　(2) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-x-12}{|x-4|}$　(3) $\lim_{x\to4}\frac{(x^2-x-12)^2}{x-4}$

(4) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-x-12}{(x-4)^2}$　(5) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-x-12}{|x|-4}$

3. 若多項式$f(x)$滿足$f(1)=0$及$f'(1)=-8$，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h}=-4$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=-24$

(3) $f(x)$至少是二次以上的多項式，即$\deg f(x)\ge2$．

(4) $f(x)$除以$(x-1)^2$的餘式為$-8x+8$

(5) 無窮數列$\left\langle f(1+\frac{1}{n})\right\rangle$的極限為0

4. 下列哪些函數在$x=0$處可微分?（$[x]$為高斯函數）

(1) $f_1(x)=[x]$　(2) $f_2(x)=x\cdot[x]$　(3) $f_3(x)=x\cdot[x+\pi]$

(4) $f_4(x)=|x^2+x|$　(5) $f_5(x)=x\cdot|x|$

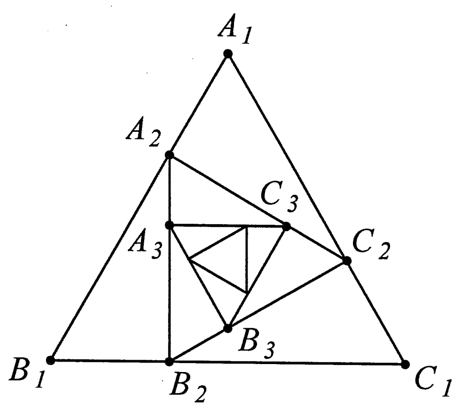
二、填充題：(每個空格5分，共13格．)

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^{2n+3}}{3^{2n}+5^n}=$____(A)____

2. 已知$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+bn}{n-1}-\frac{an^2+n}{n+3})=4$，求常數$a$與$b$的值．答：數對$(a,\ b)=$____(B)____

3. 設無窮數列$\langle\frac{3^{n+1}}{(x-3)^n}\rangle$收斂，求$x$之範圍．答：____(C)____

4. 如右圖，設$\Delta A_1B_1C_1$為正三角形且面積為 2，點A_2, B_2, C_2分別為$\overline{A_1B_1}, \overline{B_1C_1}, \overline{C_1A_1}$上逆時針方向的第一個三等分點，點$A_3, B_3, C_3$分別為$\overline{A_2B_2}, \overline{B_2C_2}, \overline{C_2A_2}$上逆時針方向的第一個三等分點，…按此規則持續不斷．設a_n為$\Delta A_nB_nC_n$的面積，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$．若$|S_n - 3| < \frac{1}{100}$，則最小正整數$n =$____(D)____



5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}}{n^2} =$____(E)____

6. 設函數$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$，則$f(x)$的定義域為____(F)____，值域為____(G)____

（用集合表示法寫答案，否則不給分．）

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^{100}+1}{x-2} =$____(H)____

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3}) =$____(I)____

9. 設平面上兩點$A(-1, \sqrt{3})$，$B(t, \sqrt{4-t^2})$，令$m(t)$表直線AB的斜率，求$\lim\limits_{t\to -1} m(t) =$____(J)____

10. 設$f(x) = \dfrac{(x-101)(x-102)(x-103)(x-104)}{(x-105)(x-106)}$，則$f'(104) =$____(K)____

11. 求函數$f(x) = (1+x)^4(1-x)^5$的圖形上，以點$P(0,1)$為切點的切線方程式．答：____(L)____

12. 設$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ g(x), & x > 0 \end{cases}$，其中$g(x)$為某個二次多項式，若$f(x)$在$x=0$處可微分，

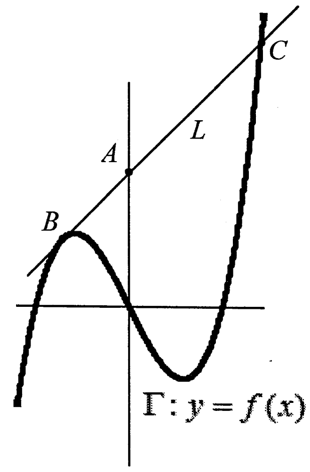
請舉一例符合此條件的多項式$g(x)$．答：$g(x) =$____(M)____

台北市立成功高中 104 學年度第 2 學期三年級數學科(自然組)第 1 次期中考試題卷 P3

三、計算題：(第 1 題 10 分，第 2 題 5 分．) (無計算過程，不予計分．)　　　　**及答案卷(背面)**

1. 設 Γ 為函數 $f(x)=x^3-2x$ 的圖形，已知點 $A(0,\ 2)$ 是 Γ 外一點，直線 L 為過 A 點且以 Γ 上 B 點為切點的切線，求：

(1)切點 B 的坐標．(2)直線 L 的方程式．(3) Γ 與 L 的另一個交點 C 的坐標．



解：

2. 請在虛線框線內完成下列微分公式的證明．

公式：若函數 $f(x)=cx^n$（c 為非零常數，n 為正整數），則 $f'(x)=ncx^{n-1}$．

證明：設 a 為實數．計算 $f'(a)$ 如下：

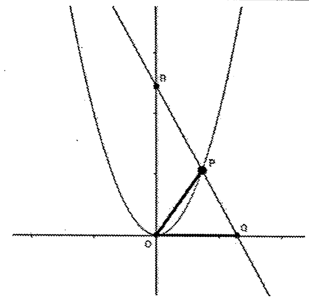
$f'(a)=$

$=nca^{n-1}$．

因此，$f'(x)=ncx^{n-1}$．

四、加分題：(5 分．)

坐標平面上，O 為原點，設 $P(t,t^2)$ 為 $y=x^2$ 上異於原點之動點，Q 為 x 軸上異於原點之動點，且 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，若 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交 y 軸於 $R(0,y(t))$，試求 $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=$＿＿＿＿



台北市立成功高中 104 學年度第 2 學期三年級數學科(自然組)第 1 次期中考答案卷(正面)

班級：______座號：____姓名：______________

一、多選題：(每題 5 分，共 4 題．) (每題至少有一個正確選項．每題全對得 5 分，錯一個選項得 3 分，其餘 0 分．)

1.	2.	3.	4.

二、填充題：(每個空格 5 分，共 13 格．)

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
(H)	(I)	(J)	(K)	(L)	(M)	

◎背面還有試題：「三、計算題」及「四、加分題」

台北市立成功高中 104 學年度第 2 學期三年級數學科(自然組)第 1 次期中考答案

一、多選題：(每題 5 分，共 4 題．)(每題至少有一個正確選項．每題全對得 5 分，錯一個選項得 3 分，其餘 0 分．)

1.	2.	3.	4.
3	135	1245	35

二、填充題：(每個空格 5 分，共 13 格．)

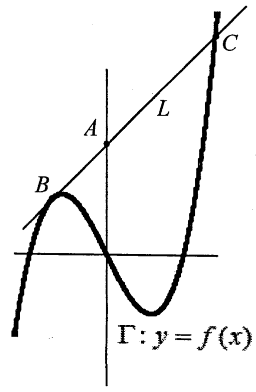
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
-27	(1, 1)	$x<0$ or $x\ge 6$	6	$\frac{1}{2}$	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, -1<x<2\}$	$\{y \mid y\in\mathbb{R}, y\ge\frac{2}{3}\}$

(H)	(I)	(J)	(K)	(L)	(M)
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	3	$y=-x+1$	ax^2+x+1 a是非0實數即可

三、計算題：(第 1 題 10 分，第 2 題 5 分．)

1. 設 Γ 為函數 $f(x)=x^3-2x$ 的圖形，已知點 $A(0,\ 2)$ 是 Γ 外一點，直線 L 為過 A 點且以 Γ 上 B 點為切點的切線，求：

(1)切點 B 的坐標．(2)直線 L 的方程式．(3) Γ 與 L 的另一個交點 C 的坐標．



解：

令 $B(t,t^3-2t)$ $\quad f'(x)=3x^2-2$

L 的斜率 $=\dfrac{(t^3-2t)-2}{t-0}=f'(t)=3t^2-2$ ……(2 分)

$\Rightarrow (t+1)(t^2-t+1)=0$ ……(1 分)

$\Rightarrow t=-1$

$\therefore B(-1,1)$ ……(2 分)

$f'(-1)=1$ 且 $A(0,2)$

$\Rightarrow L: y=x+2$ ……(2 分)

$x^3-2x=x+2\Rightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=2, f(2)=4\Rightarrow C(2,4)$ ……(3 分)

2. 請在虛線框線內完成下列微分公式的證明．

公式：若函數 $f(x)=cx^n$（c 為非零常數，n 為正整數），則 $f'(x)=ncx^{n-1}$．

證明：設 a 為實數．計算 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{cx^n-ca^n}{x-a} \text{ ……(1 分)}$$

$$=c\cdot\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)}{x-a} \text{ ……(3 分)}$$

$$=c\cdot\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)$$

$$=nca^{n-1} \text{ ……(1 分)}$$

因此，$f'(x)=ncx^{n-1}$．

四、加分題：(5 分．)

坐標平面上，O 為原點，設 $P(t,t^2)$ 為 $y=x^2$ 上異於原點之動點，Q 為 x 軸上異於原點之動點，且 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，若 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交 y 軸於 $R(0,y(t))$，試求 $\lim\limits_{t\to 0}y(t)=$ 2