台北市立成功高中 104 學年第二學期高三社會組數學第一次期中考試卷

一、 填充題(每格6分,共15格,90分)

1. 判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列，若為收斂數列，求其極限．

(1) $\langle(-1.04)^n\rangle$ ___①___ (2) $\left\langle\dfrac{1+2n+3n^2}{n^3-1}\right\rangle$ ___②___

2. 求無窮數列的極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+3n^3}=$ ___③___ .

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+4}{2n+3}=4$，求常數 $a+b=$ ___④___ .

4. 判斷下列各無窮級數為收斂或發散級數，若為收斂級數，求其和．

(1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots$ ___⑤___ (2) $9+12+16+\dfrac{64}{3}+\cdots$ ___⑥___

5. 將循環小數化成最簡分數： $1.2\overline{35}=$ ___⑦___

6. 已知對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $5n^2-2n+3\le n^2a_n\le 5n^2+2n+4$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ___⑧___ .

7. 人壽保險公司銷售一年期意外險給 35 歲的年輕人，保險額為一百萬元，保費 1100 元．依過去之統計資料顯示：35 歲年輕人可以活到 36 歲的機率為 0.999，若不考慮其他成本，試問保險公司的期望利潤為多少元？___⑨___

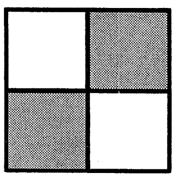
8. 設 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(A\cup B)=\dfrac{2}{5}$．(1)若 A、B 為互斥事件，求 $P(B)=$ ___⑩___ . (2) 若 A、B 為獨立事件，求 $P(B)=$ ___⑪___ .

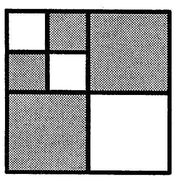
9. 丟一個公正的骰子三次，求恰出現兩次點數是 3 的機率？___⑫___

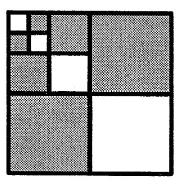
10. 某校高三有學生 500 位，某次數學段考成績呈常態分布，平均成績 72 分，標準差 12 分．問:某生成績 84 分，他在全校大約排第幾名？___⑬___

11. 某男校學務處進行「是否贊成招收女生」的意見調查，結果回收有效問卷 1100 張，其中贊成者 605 張．求 95% 的信賴區間？___⑭___

12. 一個面積為 4096 的正方形，先將其等分成4個相同的小正方形，並將右上角和左下角的二個正方形塗色，如第1圖．再將第1圖中左上角的小正方形等分成4個更小的正方形，並將右上角和左下角的二個正方形塗色，如第2圖．依照這樣的規律作成若干圖形．


第1圖


第2圖


第3圖

設 a_n 是第 n 個圖形中白色區域的面積，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ___⑮___ .

二. 證明題(10 分)

1. 試用數學歸納法證：當正整數 $n\ge 2$ 時，不等式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{n}{n+1}$ 恆成立．

台北市立成功高中 104 學年第二學期高三社會組數學期中考答案卷

班級　　　　座號　　　　姓名

一、填充題（每格 6 分，共 90 分）

①	②	③	④	⑤
⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
⑪	⑫	⑬	⑭	⑮

二、證明題(10 分)

台北市立成功高中 104 學年第二學期高三社會組數學期中考答案卷

班級　　座號　　姓名

參考答案

一、填充題（每格 6 分，共 90 分）

① 發散	② 0	③ $\frac{1}{9}$	④ 8	⑤ $\frac{3}{4}$
⑥ 發散	⑦ $\frac{1223}{990}$	⑧ 5	⑨ 100	⑩ $\frac{3}{20}$
⑪ $\frac{1}{5}$	⑫ $\frac{15}{216}$	⑬ 80	⑭ $[0.52, 0.58]$	⑮ $\frac{4096}{3}$

二、證明題(10 分)

解 (1)當 $n=2$ 時，左式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，右式 $=\frac{2}{3}$，因此 $\frac{5}{6}>\frac{2}{3}$，原式成立．**(2 分)**

(2)設 $n=k$（$k\geq 2$）時原式成立，即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}>\frac{k}{k+1}$，**(2 分)**

則 當 $n=k+1$ 時，

左式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}>\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+2}$，

右式 $=\frac{k+1}{k+2}$，

將兩式相減，得

左式−右式 $=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

因此左式大於右式，即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}>\frac{k+1}{k+2}$，

所以原式在 $n=k+1$ 時也成立．**(5 分)**

故由數學歸納法可知:

當正整數 $n\geq 2$ 時，不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}>\frac{n}{n+1}$ 恆成立．**(1 分)**