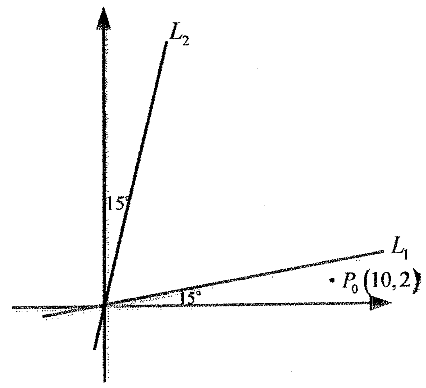
臺北市立成功高級中學103學年度第2學期高二自然組數學科期末考試題

一、觀念是非題：(每題2分，共20分)

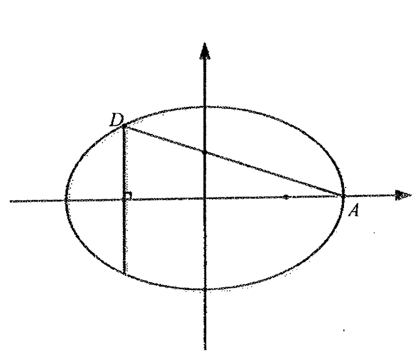
1. 設A,B,C皆爲二階方陣，且$AB=AC$，則$B=C$。
2. 設A,B皆爲二階方陣且有乘法反方陣，則$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$。
3. 設A爲二階方陣且有乘法反方陣，則$\det A=\det A^{-1}$。
4. 二階方陣$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$可以使$\Delta ABC$經該方陣變換後面積保持不變。
5. 當焦點與準線的距離越小，則拋物線的開口越窄。
6. 拋物線上距離焦點最近的點是拋物線的頂點。
7. 橢圓內最長的弦是長軸。
8. 橢圓上距離焦點最近的點是通過該焦點之正焦弦的端點。
9. 雙曲線爲兩條拋物線所組成。
10. 等軸雙曲線的兩條漸近線互相垂直。

二、填充題：(每格6分，共72分，請將答案化至最簡)

1. 設實係數二階方陣A滿足$A\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}2\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$；若$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則$a+b+c+d=$___(1)___。
2. 設$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，若$A-B+CX=2A+B+X$，則$X=$___(2)___。
3. 矩陣$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}$，其中$a,b,c$爲實數，且$\det A=1$，則$\det(A-A^{-1})=$___(3)___。



4. 給定坐標平面上兩直線$L_1: y=(2-\sqrt{3})x$，其與x軸正向夾角爲15°，以及$L_2: y=(2+\sqrt{3})x$，其與x軸正向夾角爲75°，如右圖所示；若點$P_0(10,2)$對於L_1的鏡射點爲P_1，點P_1對於L_2的鏡射點爲P_2，則P_2的坐標爲___(4)___。
5. 將點$P(6,4)$依序經下列各變換：先以原點爲中心旋轉90°；再對x軸作鏡射；接著以原點爲中心旋轉-90°；最後對直線$y=x$作鏡射。則依序變換後最終的點坐標爲___(5)___
6. 設拋物線的方程式爲$y^2=16x$，且此拋物線上在第一象限的點P與焦點的距離等於5，則點P的坐標爲___(6)___。
7. 一拋物線之對稱軸垂直$y=0$，且過$(1,1),(3,3),(-1,3)$三點，則此拋物線的焦點坐標爲___(7)___。
8. 試求與橢圓$\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{A-16}=1$共焦點，且過$(0,-3)$的橢圓方程式___(8)___(標準式)。



9. 設橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$，其長軸頂點爲$A$，正焦弦之一端點爲$D$，如右圖所示，則$\overleftrightarrow{AD}$與$y$軸的交點坐標爲___(9)___。
10. 設雙曲線$\Gamma: \dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{12}=1$，其左焦點爲$F_1$，今以$\Gamma$的中心爲圓心做圓$C$恰與$\Gamma$交於相異兩點，則從$F_1$對圓$C$所做的切線段長爲___(10)___。

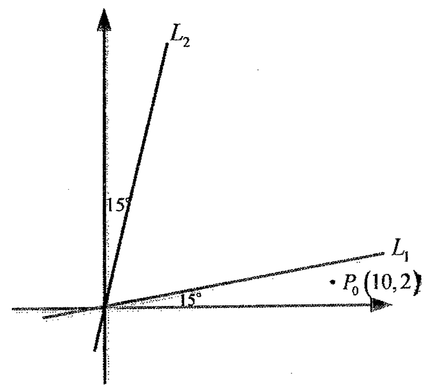
臺北市立成功高級中學 103 學年度第 2 學期高二自然組數學科期末考試題

一、觀念是非題：(每題 2 分，共 20 分)

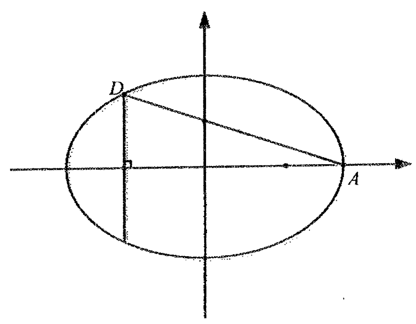
1. 設 A,B,C 皆為二階方陣，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$ 。
2. 設 A,B 皆為二階方陣且有乘法反方陣，則 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ 。
3. 設 A 為二階方陣且有乘法反方陣，則 $\det A=\det A^{-1}$ 。
4. 二階方陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 可以使 ΔABC 經該方陣變換後面積保持不變。
5. 當焦點與準線的距離越小，則拋物線的開口越窄。
6. 拋物線上距離焦點最近的點是拋物線的頂點。
7. 橢圓內最長的弦是長軸。
8. 橢圓上距離焦點最近的點是通過該焦點之正焦弦的端點。
9. 雙曲線為兩條拋物線所組成。
10. 等軸雙曲線的兩條漸近線互相垂直。

二、填充題：(每格 6 分，共 72 分，請將答案化至最簡)

1. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $A\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$;若 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d=$ ___(1)___ 。
2. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ， $C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $A-B+CX=2A+B+X$ ，則 $X=$ ___(2)___ 。
3. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 a,b,c 為實數，且 $\det A=1$ ，則 $\det(A-A^{-1})=$ ___(3)___ 。
4. 給定坐標平面上兩直線 $L_1: y=(2-\sqrt{3})x$ ，其與 x 軸正向夾角為 15° ，以及 $L_2: y=(2+\sqrt{3})x$ ，其與 x 軸正向夾角為 75° ，如右圖所示;若點 $P_0(10,2)$ 對於 L_1 的鏡射點為 P_1 ，點 P_1 對於 L_2 的鏡射點為 P_2 ，則 P_2 的坐標為 ___(4)___ 。



5. 將點 $P(6,4)$ 依序經下列各變換：先以原點為中心旋轉 90° ;再對 x 軸作鏡射;接著以原點為中心旋轉 -90° ;最後對直線 $y=x$ 作鏡射。則依序變換後最終的點坐標為 ___(5)___
6. 設拋物線的方程式為 $y^2=16x$ ，且此拋物線上在第一象限的點 P 與焦點的距離等於 5 ，則點 P 的坐標為 ___(6)___ 。
7. 一拋物線之對稱軸垂直 $y=0$ ，且過 $(1,1),(3,3),(-1,3)$ 三點，則此拋物線的焦點坐標為 ___(7)___ 。
8. 試求與橢圓 $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{A-16}=1$ 共焦點，且過 $(0,-3)$ 的橢圓方程式 ___(8)___ (標準式)。
9. 設橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ ，其長軸頂點為 A ，正焦弦之一端點為 D ，如右圖所示，則 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 y 軸的交點坐標為 ___(9)___ 。



10. 設雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ ，其左焦點為 F_1 ，今以 Γ 的中心為圓心做圓 C 恰與 Γ 交於相異兩點，則從 F_1 對圓 C 所做的切線段長為 ___(10)___ 。

臺北市立成功高級中學103學年度第2學期高二自然組數學科期末考答案卷

班級：________座號：________姓名：____________

一、觀念是非題：(每題2分，共20分，請以○ ╳作答)

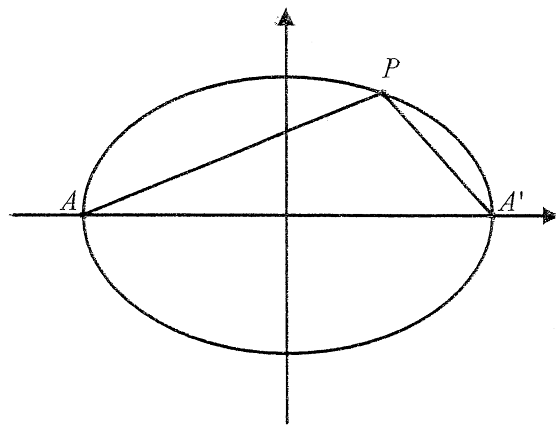
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
╳	╳	╳	○	○	○	○	╳	╳	○

二、填充題：(每格6分，共72分，請將答案化至最簡)

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{5}{4}$	$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 11 & 9 & 10 \end{bmatrix}$	4	$\left(-5-\sqrt{3},5\sqrt{3}-1\right)$
(5)	**(6)**	**(7)**	**(8)**
$(4,-6)$	$(1,4)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 標準式
(9)	**(10)**	**(11)**	**(12)**
$(0,1)$	$2\sqrt{3}$	4	$\frac{y^2}{18}-\frac{x^2}{9}=1$ 標準式

三、計算證明題：(每題8分，共8分)

1. 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的長軸頂點爲$A,A'$，今在上取一動點$P$ (非長軸頂點)，試證：動點P至長軸頂點A,A'的連線斜率之積$m_{\overline{PA}}\times m_{\overline{PA'}}$爲定值。



證明：令動點$P(m,n)$，則$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1 \Rightarrow n^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-m^2\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{故 } m_{\overline{PA}}\times m_{\overline{PA'}} &= \frac{n}{m+a}\times\frac{n}{m-a} \\
&= \frac{n^2}{m^2-a^2} \\
&= \frac{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-m^2\right)}{m^2-a^2} = -\frac{b^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

(與m,n無關，爲定值)

※請各老師依證明的完整性給予0,3,6,8分