

臺北市立成功高中 103 學年度第二學期三年級自然組數學科期末考試題卷

一、多重選擇題(24%，每題 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上不給分)

1. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，則下列敘述哪些為真？

(1) 若 $f'(x) \geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 無極值

(2) 若 $\deg f(x) = 7$ ，則 $f(x)$ 至少存在一個反曲點，最多 5 個反曲點

(3) 若 $\deg f(x) = 4$ ，則 $f(x)$ 至少存在一條有水平切線

(4) 若 $f'(x) = g(x)$ ，則 $\int g(x)dx = f(x)$

(5) 若 $f'(c) = 0$ ，則 $(x-c)^2 | f(x)$

2. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式函數。已知五個方程式的相異實根個數如下表所示，則下列哪些選項為真？

(1) $f(x)$ 的最大值為 3

(2) $f(x)$ 的反曲點在 x 軸上

(3) $f(x) - 2015 = 0$ 恰有三實根

(4) $f(2-x) = 1$ 恰有三相異實根

(5) 方程式 $f'(x) = 0$ 恰有兩相異實根

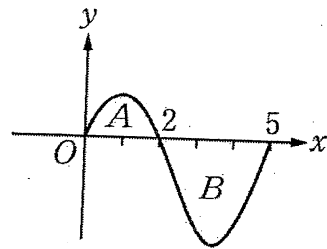
方程式	相異實根個數
$f(x) - 5 = 0$	1
$f(x) - 3 = 0$	2
$f(x) = 0$	3
$f(x) + 3 = 0$	2
$f(x) + 5 = 0$	1

3. 下列哪些函數在 $x=1$ 處可微分？

(1) $f(x) = x$ (2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ (3) $f(x) = [x]$, $[x]$ 表高斯符號 (4) $f(x) = |x-1|$ (5) $f(x) = x|x-1|$

4. 如下圖 $y = f(x)$ 圖形與 x 軸交於 $(0,0)$, $(2,0)$, $(5,0)$ ，已知 $\int_0^2 f(x)dx = 3$, $\int_0^5 f(x)dx = -7$ ，下列哪些正確？

(1) $\int_0^5 |f(x)|dx = 13$ (2) $\int_2^5 (f(x) + 2x)dx = 21$ (3) $\int_0^3 f(x+2)dx = -10$ (4) $f'(4) < 0$ (5) $f''(1) > 0$



二、填充題(66%，每題 6 分)

1. 求過拋物線 $y = x^2 + x + 2$ 上一點 $P(-1,2)$ 的切線方程式為 _____ (A)

2. $f(x) = \frac{-6(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ ，求 $f'(1) =$ _____ (B)

3. 計算下列各式

(1) $\int_{-3}^2 (1-5x^3)dx + \int_2^3 (1-5x^3)dx =$ _____ (C)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{2k}{n}\right)^2} =$ _____ (D)

(3) $f(x) = \int_5^x (2t^3 - 1)dt$ ，求 $f''(5) =$ _____ (E)

(4) $f(x) = \int_0^2 [2x] dx =$ _____ (F)，其中 $[]$ 為高斯符號

4. 已知 $f(x) = x^2 - x - 1$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2-h)}{h} =$ _____ (G)

5. 由 $y = x^3$ 與 $x = 0$ ， $x = 2$ 及 x 軸圍成一個區域 S ，將 S 分成 n 個等寬的長方形，試求出上和 $U_n =$ _____ (H)；
若希望和 U_n 與實際面積誤差小於 0.01 ，則至少需分成幾等分？ _____ (I)

6. 曲線 $y = \sqrt{x}$ 與 $x = 2$ ， $x = 4$ 及 $y = 1$ 所圍成的區域，繞 x 軸旋轉一圈所得的體積為 _____ (J)

7. 設實係數多項式函數 $f(x) = -x^3 - ax^2 + ax + 1$ 無極值，求 a 的範圍 _____ (K)

三、計算題(10%)

1. 設兩函數 $\Gamma_1: y = x^3 - x^2$ ， $\Gamma_2: y = 2x$

(1) 試求出兩圖形的交點(4%)

(2) 試求出 Γ_1 與 Γ_2 所圍成的區域面積。(6%)

臺北市立成功高中 103 學年度第二學期三年級自然組數學科期末考試題卷

一、多重選擇題(24%，每題 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上不給分)

1. 1 2 3	2. 2 4 5	3. 1 2	4. 1 3
-------------	-------------	-----------	-----------

二、填充題(66%，每題 6 分)

(A) $x+y=1$	(B) 1	(C) 6	(D) $\frac{\pi}{2}$
(E) 150	(F) 3	(G) -6	(H) $\frac{4(n+1)^2}{n^2}$
(I) 801	(J) 4π	(K) $-3 \leq a \leq 0$	

三、計算題(10%)

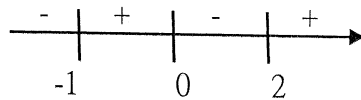
1.(1)

$$\text{令 } x^3 - x^2 = 2x, \quad x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2)(x+1) = 0,$$

$$x = 0, 2, -1$$

交點為 $(0,0)$ ， $(-1,-2)$ ， $(2,4)$



(4分)(錯一個得 2 分，錯兩個不得分)

$$(2) \int_{-1}^0 [(x^3 - x^2) - 2x] dx + \int_0^2 [2x - (x^3 - x^2)] dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left(4 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{37}{12}$$

(6%)(分別算出一個區域面積得 3 分)