

臺北市立成功高級中學 103 學年度第二學期高二數學期中考試題卷

※請將答案填入答案格內。

一、多選題(每題 5 分，共 20 分；錯一個選項扣 2 分，錯兩個選項扣 4 分，錯兩個選項以上不給分)

1. 下列各選項中，關於平面 $E: 3x - 4y + 5z + 6 = 0$ 的敘述，哪些是正確的？

(A) 平面 $E_1: 3x - 4y - 5z + 6 = 0$ 與平面 E 垂直 (B) 平面 $E_2: 6x - 8y + 10z + 12 = 0$ 與平面 E 重合

(C) 平面 $E_3: 4x + 3y + 5z + 6 = 0$ 與平面 E 的銳夾角為 60°

(D) x 軸與平面 E 交於一點 (E) 直線 $L: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{5}$ 與平面 E 垂直

2. 空間坐標中，關於下列方程式圖形的敘述，何者為真？

(A) $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ 為一直線 (B) $\begin{cases} 13x+7y+21z=17 \\ 26x+14y+42z=34 \end{cases}$ 為一平面 (C) $x+y=0$ 為一直線

(D) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$ 為一點 (E) $\frac{x-y}{2} = \frac{y-z}{-5} = \frac{z-x}{3}$ 為一直線。

3. 關於三平面 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 的幾何關係，下列選項何者正確？

(A) 當 $a=0$ 時，三平面平行 (B) 當 $a=1$ 時，三平面重合 (C) 當 $a=2$ 時，三平面交於一線

(D) 當 $a=-2$ 時，三平面交於三線，且三直線沒有交點 (E) 當 $a=23$ 時，三平面交於一點。

4. 設 A, B, C 皆是 2 階方陣， O 為 2 階零矩陣，下列選項何者正確？

(A) $AB = BA$ 恆成立 (B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 恆成立 (C) $(A+B)C = BC + AC$ 恆成立

(D) 若 $A=O$ 或是 $B=O$ ，則 $AB=O$ (E) 若 $A \neq O$ 且 $AB=AC$ ，則 $B=C$ 。

二、填充題(每格 5 分，共 60 分)

1. 已知點 $P(1, 2, 3)$ 與平面 $E: 2x - 3y - 6z + 1 = 0$ ，試求：

(1) 點 P 到平面 E 的距離為 (A) _____；(2) 點 P 在平面 E 上的垂足坐標為 (B) _____

2. 已知平面 $2x + y + 2z = 1$ 與平面 $x - 2y - 2z = 5$ ，求此兩平面的角平分面方程式為 (C) _____ (全對才給分)

3. 求包含 $L: \begin{cases} 2x+z=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$ 且與平面 $x+2y-z=0$ 垂直的平面方程式為 (D) _____

4. 求包含兩直線 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ 的平面方程式為 (E) _____

5. 若三平面 $\begin{cases} 2x-7y-z=2 \\ 3x-3y+z=-2 \\ x+4y+mz=n \end{cases}$ 交於一直線 L ，則(1) 數對 $(m,n) =$ _____ (F) _____；(2) 直線 L 與 z 軸交點為 _____ (G) _____。

6. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 5 \\ 2 & b & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & c \end{bmatrix}$ 經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 $a+b+c =$ _____ (H) _____。

7. 若矩陣 $[a_{ij}]_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \cdots & 81 & 100 \\ 2 & 3 & 8 & \cdots & 80 & 99 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & 79 & 98 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 82 & 83 & 84 & \cdots & \cdots & 91 \end{bmatrix}_{10 \times 10}$ ，則 $a_{93} =$ _____ (I) _____。

8. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 $A^{10} =$ _____ (J) _____。

9. 聯立方程組 $\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 4x+y+3z=1 \\ 2x+2y+3z=2 \end{cases}$ 的解為 _____ (K) _____。

10. 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$ 、 $A(8,0,0)$ 、 $B(8,8,0)$ 、 $C(0,8,0)$ ，另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O 、 A 、 B 、 C 四點的距離皆為 6，若 $x+by+cz+d=0$ 為通過 A 、 B 、 P 三點的平面，則 $(b,c,d) =$ _____ (L) _____。

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 設兩歪斜線 $L_1: \frac{x-11}{4} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+7}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-2}$

(1) 求 L_1 、 L_2 的公垂線方程式(5分)

(2) 求 $d(L_1, L_2)$ (5分)

2. 阿成熱愛打籃球，他時常練習投三分球。依據過去的經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為 90%，若前一球沒投進，下一球的命中率變成 60%。求：

(1) 阿成投籃的轉移矩陣(3分)

(2) 長期而言，阿成投三分球的命中率會趨近多少？(7分)

臺北市立成功高級中學 103 學年度第二學期高二數學期中答案卷

※請使用藍色或黑色原子筆作答。 班級_____ 座號_____ 姓名_____ 得分_____

一、多選題(每題 5 分，共 20 分；錯一個選項扣 2 分，錯兩個選項扣 4 分，錯兩個選項以上不給分)

1.	2.	3.	4.
ABCD	ABDE	BDE	CD

二、填充題(每格 5 分，共 60 分)

(A)	(B)	(C)	(D)
3	$(\frac{13}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7})$	$3x - y = 6$ 或 $x + 3y + 4z + 4 = 0$ (全對才給分)	$2x - y - 2 = 0$
(E)	(F)	(G)	(H)
$5x - 3y + z = 0$	(2, -4)	(0, 0, -2)	18
(I)	(J)	(K)	(L)
67	$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-\frac{1}{2}t, 1-t, t), t \in \mathbb{R}$	(0, 2, -8)

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 設兩歪斜線 $L_1: \frac{x-11}{4} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+7}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-2}$

(1) 求 L_1, L_2 的公垂線方程式(5分) (2) 求 $d(L_1, L_2)$ (5分)

設公垂線 L 與 L_1 交於 $A(11+4t, -5-3t, -7-t)$ ，與 L_2 交於 $B(-5+3s, 4-4s, 6-2s)$ ----- (1分)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{l}_1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{l}_2 = 0 \end{cases} \text{----- (2分)} \quad \text{※只求出距離給 5 分}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ s = 2 \end{cases} \therefore A(3, 1, -5), B(1, -4, 2) \text{----- (1分)} \quad \text{※使用不同方法請老師們自行配分}$$

故得(1) $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{-7}$ ----- (1分) (2) $d(L_1, L_2) = \overline{AB} = \sqrt{78}$ ----- (5分)

2. 阿成熱愛打籃球，他時常練習投三分球。依據過去的經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為 90%，若前一球沒投進，下一球的命中率變成 60%。求：

(1) 阿成投籃的轉移矩陣 A (3分)

(2) 長期而言，阿成投三分球的命中率會趨近多少？(7分)

(1) $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$ ----- (3分)

(2) $AX = X \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ----- (3分)

$\Rightarrow x = 6y$ ----- (2分)，因此長期而言，阿成投三分球的命中率會趨近 $\frac{6}{7} \approx 86\%$ ----- (2分)