

臺北市立成功高中 103 學年度第二學期高一第二次期中考數學試題

一、多選題：(每題全對可得 5 分，只錯一個選項可得 3 分，只錯二個選項可得 1 分，其餘得 0 分)

1. 下列敘述，哪些是正確的？

(1) 若 $A = \{1, 2, \{3\}, 5\}$ ，則 $\{3\} \in A$ (2) 若 $A = \{1, 2, \{3\}, 5\}$ ，則 $\{3\} \subset A$ (3) 空集合沒有子集合 (4) 連續擲一枚公正的硬幣 3 次，若 A 代表「正面至少出現 2 次」的事件， B 代表「反面至少出現 2 次」的事件，則 A 和 B 為互斥事件 (5) 投擲一個公正的骰子 1 次，觀察出現的點數，令 A 代表「出現奇數點」的事件， B 代表「點數小於 4」的事件，則 A 與 B 的和事件為 $\{1, 3\}$

2. 若 A, B, C 為三個集合， A' 為 A 之補(餘)集， B' 為 B 之補(餘)集，則下列那些選項是正確的？

(1) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (2) 若 $A \subset B$ ，則 $B' \subset A'$ (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (5) $(A - B) - C = A - (B - C)$

二、填充題：(每格 6 分)

1. 試求 $(1+3x^2) + (1+3x^2)^2 + (1+3x^2)^3 + \dots + (1+3x^2)^{10}$ 展開式中， x^6 的係數為 (A)。

2. 試求 $(x^2 + 2x)^{10}$ 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 (B)。

※請一律將答案算出來，不可以 P_k'' 、 C_k'' 、 H_k'' 、 $n!$ 的形式表示。

全球矚目的好萊塢鉅片「復仇者聯盟 2」上演了，小成、小功和小濟三個好朋友決定邀請兩位遠在高雄的友校的女同學小麗與小美來臺北進行一場「復仇者」的深度之旅。

3. 小麗與小美來到高雄火車站準備搭車前往臺北，臺鐵為了與高鐵競爭提高運輸效率，臺北到高雄之間共有 19 站，這 19 站中除了正中間的臺中站必定停靠外其餘只需再選擇兩站停靠，且這兩站不可與臺北、臺中、高雄相鄰，也彼此互不相鄰，則共有 (C) 種安排停靠車站的方法。

4. 上了火車後，火車總共有 10 節車廂，其中兩節安排為吸煙車廂、四節設有廁所、三節設有販賣部，且廁所與吸煙車廂不可與販賣部設在同樣的車廂；廁所也不可以設在彼此相鄰的車廂內(吸煙車廂可與廁所設在相同的車廂)，那麼請問安排車廂的方法數共有 (D) 種。

5. 抵達臺北後，一行人決定先到飲料店坐坐，菜單上有熱飲 6 種，冷飲 4 種，請問他們 5 人共有 (E) 種點選飲料的方式；就服務生而言，他所看到的點單上可能出現 (F) 種不同的點餐結果。

6. 時間匆匆過去，快到了電影開演的時間，電影院總共有 A, B, C, D 四個賣票窗口，為了節省時間，他們 5 人決定每個窗口都各派一個人去排隊，剩下的一個人留下來等候，請問他們安排買票的方式共有 (G) 種不同的方法。

7. 在電影中，美國隊長陷入了猩紅女巫的幻象中，他回到二戰時期的美國，在一場舞會中，包含美國隊長與他的愛人卡特探員一共有 5 對男女，這 5 隊男女在舞池中任意男女配對共舞，但在猩紅女巫的幻象之中美國隊長無法跟愛人卡特探員共舞，請問在這樣的情形之下，總共有 (H) 種分配舞伴的方法。
8. 鷹眼(Hawkeye)是個百發百中的神射手，東尼史塔克幫他設計了 6 種不同的箭，每次準備作戰時 6 種箭他都會準備 4 枝背在身上，每次發射時，隨意抽取 5 枝箭同時發射(不計發射順序)，請問鷹眼有 (I) 種不同的發射方式。
9. 出了電影院後，一行人意猶未盡決定前往參觀官方所辦的漫威英雄展，斗大的 AVAENGERS 海報出現在眼前，請問 AVAENGERS 一字中，全取排成一行且同字皆不相鄰的排法有 (J) 種。
10. 展覽會場中，舉辦票選英雄活動，最後由美國隊長與鋼鐵人角逐冠軍，如果已知美國隊長以 7 票比 5 票贏過鋼鐵人，而且在開票的過程中，美國隊長的得票數一路領先鋼鐵人，請問所有可能的開票方式共有 (K) 種。
11. 參觀展覽結束後一行人前往簡餐店陽泉酒家，為了讓每位顧客可以在提供的菜餚中任選 2 葷 2 素總共 4 種不同的菜色，已知陽泉酒家已經準備了 5 種不同的葷菜，若要保證讓每位顧客可以有 200 種以上不同的選擇，請問陽泉酒家還需要準備 (L) 種不同的素菜。
12. 在陽泉酒家準備餐點的過程中，其中有一道葷菜「魔幻麻婆豆腐」，在烹煮時需要加入蔥、薑、蒜、酒、辣椒、豆瓣醬、辣油、胡椒等 8 種調味料，已知在下鍋時一次只能放入一樣調味料，而且蔥、薑、蒜必須在豆瓣醬前放入；辣椒與辣油必須接續放入(例如放入辣椒後接著就必須立刻放入辣油，或是放入辣油後接著就必須立刻放入辣椒)，其餘沒有任何限制，請問共有 (M) 種調味料下鍋的方法。

三、計算證明題：(請寫出詳細過程，否則不予計分)

(1) 設 n 為正整數，證明 $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ 對 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 均成立。(7 分)

(2) 試求 $C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \dots + C_3^{12}$ 的值。(5 分)

麻煩監考老師協助宣布：

填充題第 3 題：「小麗與小美來到高雄火車站...，臺北
到高雄之間共有 19 站，...。」請在底線()之後加上
「不包含臺北站與高雄站」的條件。

填充題第 5 題：請在題目最後加上「已知每個人都恰
點 1 杯」的條件。

萬分感謝！

臺北市立成功高中 103 學年度第二學期高一第二次期中考數學答案

一、多選題：(每題全對可得 5 分，只錯一個選項可得 3 分，只錯二個選項可得 1 分，其餘得 0 分)

1.	1 4	2.	1 2 3 4
----	------------	----	----------------

二、填充題：(每格 6 分)

(A)	8910	(B)	$-10x^2 - 20x - 9$	(C)	79
(D)	14700	(E)	100000	(F)	2002
(G)	120	(H)	96	(I)	246
(J)	55440	(K)	132	(L)	7
(M)	2520				

三、計算證明題：

(1) 設 n 為正整數，證明 $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ 對 $k=1, 2, \dots, n-1$ 均成立。(7 分)

(2) 試求 $C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \dots + C_3^{12}$ 的值。(5 分)

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 右式} &= C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right] \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times \frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n = \text{左式} \quad \text{得證}
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 所求} = C_4^4 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \dots + C_3^{12} - 1$$

$$= C_4^5 + C_3^5 + C_3^6 + \dots + C_3^{12} - 1$$

$$= C_4^6 + C_3^6 + \dots + C_3^{12} - 1$$

⋮

$$= C_4^{13} - 1 = 714$$