

數學科第一次期中考試題卷

一、多重選擇題(10%)

1. 下列選項中，請選出極限值為0的選項？(其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} x[x]$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - x}{x - 1} \right)$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 + x^3}{x}$

2. 已知 $f(x) = \frac{|x^2 - 5x| - 6}{x - 2}$ ，請問哪些選項正確？

(1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 連續 (2) $f(x)$ 在 $x = 2$ 連續 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 極限值不存在 (5) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

二、填充題(70%)

1. 循環小數 $0.\overline{2}$ 至少要寫到小數點後第_____位，才能使它的值與 $\frac{2}{9}$ 的差小於 $\frac{1}{10^9}$ 。

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ ，則(1)合成函數 $(g \circ f)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(2)合成函數 $(g \circ f)(x)$ 的定義域為_____。

3. 已知函數 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$ 其定義域 $A = \{x | 4 \leq x \leq 7\}$ ，則值域 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)^5 - 1}{x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知一皮球自離地面 3 公尺高處落下，首次反彈高度為 2 公尺，設此後每次反彈高度為其前次反彈高度的 $\frac{2}{3}$ ，則此球到完全靜止前，所經過路徑的總長度為_____公尺。

6. 已知 $a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x > -1 \\ -ax + 5, & x \leq -1 \end{cases}$ 為連續函數，則實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

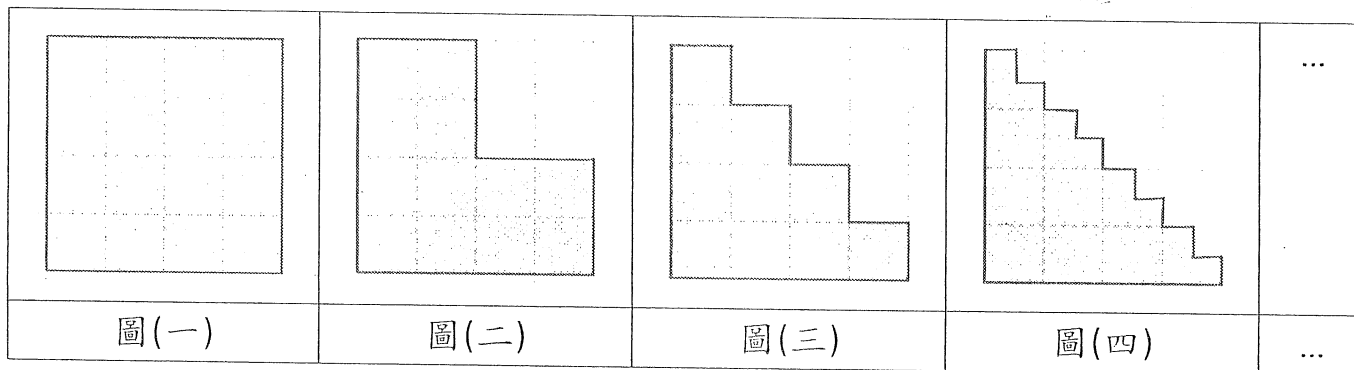
8. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx - 8}{x^2 - 3x + 2} = -6$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx - 8}{x^2 - 3x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 試求 $\sum_{n=1}^{100} [\log_3 n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(高斯符號 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數)

10. $\lim_{x \rightarrow 5} [x - [x-1]] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(高斯符號 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數)

11. 試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2+2^2-2^3+\dots+(-1)^{n-1}(2)^{n-1}}{3^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12.



觀察上圖，已知第 1 個圖(圖(一))為邊長為 1 的正方形。在圖(一)右上角截去 1 個邊長為 $\frac{1}{2}$ 的正方形，得圖(二)。在第 2 個圖(圖(二))右上角截去 2 個邊長為 $\frac{1}{4}$ 的正方形，得圖(三)。在第 3 個圖(圖(三))右上角截去 4 個邊長為 $\frac{1}{8}$ 的正方形，得圖(四)，...，依此類推。

假設第 n 個圖形的面積為 A_n ，第 n 個圖形的周長為 L_n 。

試求(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算證明題(20%)

1. (1) 請舉例寫出兩數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 使其滿足: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均為發散，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ 為發散數列。

(2) 請舉例寫出兩數列 $\langle c_n \rangle, \langle d_n \rangle$ 使其滿足: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ 均為發散，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n)$ 為收斂數列。

2. 設 $f(x) = x^5 + x^2 + x + 1$ ， $g(x) = 3x^3 + x^2 + 8$ ，試證明：在 1 與 2 之間存在一實數 c ，使得 $f(c) = g(c)$ 。

台北市立成功高級中學 103 學年度第二學期三年級自然組

數學科第一次期中考答案

班級_____座號_____姓名_____

一、多重選擇題(10%)(每題 5 分，錯一個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，錯 3 個選項以上得 0 分)

1.	2.
(2)(4)(5)	(1)(3)(5)

二、填充題(70%)(每格 5 分) 定義域與值域若沒寫成集合符號各扣 2 分

1.	2.(1)	2.(2)	3.	4.
9	$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x-4}$	$\{x x \geq 0, x \neq 4\}$	$\{y 0 \leq y \leq \sqrt{15}\}$	5
5.	6.	7.	8.	9.
15	$\frac{1}{2}$	$a = -2$	-4	284
10.	11.	12.(1)	12.(2)	
1	$\frac{11}{30} \frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	4	

三、計算證明題(20%)

<p>1.(每小題各 5 分)</p> <p>(1)例如: $a_n = n^2, b_n = n$ 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均為發散, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n)$ 亦為發散。</p> <p>(2)例如: $c_n = (-1)^n, d_n = (-1)^{n+1}$ 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均為發散, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) = -1$ 收斂</p>	<p>2.</p> <p>設 $F(x) = f(x) - g(x)$ $= x^5 - 3x^3 + x - 7$ ----- (3 分)</p> <p>則 $F(1) = -8 < 0, F(2) = 3 > 0,$</p> <p>$\therefore F(x)$ 為連續函數, 且 $F(1)F(2) < 0,$</p> <p>----- (4 分)</p> <p>由勘根定理(或中間值定理)得知: 存在 $c \in (1, 2)$ 使的 $F(c) = 0$, 即</p> <p>$F(c) = f(c) - g(c) = 0$</p> <p>故在 1 與 2 之間存在一實數 c, 使得 $f(c) = g(c)$。----- (3 分)</p>
--	--