台北市立成功高中103學年度下學期高一第一次期中考試題

一、多選題：全對得8分，錯一個選項得5分，錯兩個選項得2分，其餘不給分

1. 下列敘述何者正確？

(A)設數列$<a_n>$為等比數列且每項均大於零，若$b_n=\log a_n$，則數列$<b_n>$為等差數列

(B)若數列$<a_n>$為等差數列，且$b_n=(-2)^{a_n}$，則數列$<b_n>$為等比數列

(C)若數列$<a_n>$為等差數列，且$S_n=a_1+...+a_n$表數列的前n項和，則
S_{10},$(S_{20}-S_{10})$,$(S_{30}-S_{20})$也為等差數列

(D)若數列$<a_n>$為等比數列，且$S_n=a_1+...+a_n$表數列的前n項和，則
S_{10},$(S_{20}-S_{10})$,$(S_{30}-S_{20})$也為等比數列

(E)若數列$<a_n>$為一數列且每項均大於零，且$S_n=a_1+...+a_n$表數列的前n項和，若
S_1,S_2,S_3,S_4,S_5形成一等差數列，則a_2,a_3,a_4,a_5形成一等比數列

2. 下列有關Σ的敘述何者正確？

(A)$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(B)$\sum_{k=1}^{n}\pi a_k b_k=\pi\sum_{k=1}^{n}a_k b_k$

(C)$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)$

(D)$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}$

(E)$\sum_{k=1}^{n}2015=2015$

二、填充題，每格6分

1. 20 × 1 + 19 × 2 + 18 × 3 + 17 × 4 + ⋯ + 2 × 19 + 1 × 20 =____

2. 設$<a_n>$為一等比數列，且$a_1+a_2=3$, $a_4+a_5=-24$，則$\sum_{i=1}^{10}a_i=$____

3. 若函數$f(x)=(-\sqrt{2})^x+3x-1$，試求$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=$____

4. 已知$<a_n>$為等差數列，且$a_{10}=-50$，$a_{51}=73$，若前n項和有最小值，求：
(1) $n=$ __________ (2)此最小值為__________

5. 設n為正整數，數列$\langle a_n\rangle$為$\log_2 n$的整數部分，求$\sum_{k=1}^{63}a_k=$____

6. 設 n 為正整數且 $S_n = 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \ldots + (n+1)\cdot 2^n$，若 $S_{2015} = m\cdot S_{2014}$，則 m=____

7. 在某個國家的上古神話之中，支撐人類世界的世界之樹在一次戰役之中幾乎被不死族摧毀，還好留下了嫩芽得以繼續生長；假設嫩芽的長度為 1 公尺，且每一天會比前一天長高一倍再多 1 公尺。設第 n 天後樹高為 a_n 公尺，即 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$，以此類推，則：
(1)數列 $< a_n >$ 的遞迴關係式為____
(2)第 n 項 a_n 的一般式為____
(3)設第 100 天後，樹總算可以連結到天界，請問在此神話世界之中，天界和地面的距離最接近下列何者(單位為公尺)？($\log 2 = 0.3010$)
(A)10^{25} (B)10^{30} (C)10^{35} (D)10^{40} (E)10^{45}

8. 台北市的房價和年輕人的薪水有著巨大的差距。在實價登錄網站之中，成功高中附近有一公寓約 30 坪，價格為 3000 萬元。而內政部主計處的統計資料顯示，30 歲左右的年輕人，平均年薪約為 48 萬。若有一畢業多年，年約 30 歲的成功高中校友，得到家裡的資助 500 萬，然後向銀行借了 2500 萬購屋；若銀行的年利率為 1.8%，且這位校友的年薪為 50 萬元(高於平均薪資喔)，若他把每年的收入全部用於償還貸款(也就是所謂的不吃不喝)，則需___年才能還完銀行貸款($\log 1.018 = 0.0077$)

9. 將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

第 1 列	1
第 2 列	2,3
第 3 列	4,5,6
第 4 列	7,8,9,10
第 5 列	11,12,13,14,15
. . .	. . .

已知 2015 為第 m 列的第 n 個數，求(m, n) =____

三、計算證明題：共 12 分，請詳列過程，否則不予計分

1. 若數列 $< a_n >$ 滿足下列遞迴關係式：$a_1 = -1, a_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{3-a_n}, n \ge 1$
(1)試求出 a_3, a_5, a_7(3 分)
(2)試猜測第 n 項 a_n 的一般式(3 分)
(3)請用數學歸納法證明你的猜測(6 分)

台北市立成功高中 103 學年度下學期高一第一次期中考答案卷

班級：________座號：______姓名：____________

四、 多選題：全對得 8 分，共 16 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，其餘不給分

1. 全	2. AB

五、 填充題：每格 6 分，共 72 分

1. 1540	2. 1023	3. $217-31\sqrt{2}$	4.(1) 26
4.(2) -1027	5. 258	6. $\dfrac{2015}{1007}$	7.(1) $a_n=2a_{n-1}+1$
7.(2) 2^n-1	7.(3) B	8. 130	9. (63, 62)

六、 計算證明題：共 12 分，需詳列過程，否則不予計分

(1)$\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{7}$(3 分)

(2)$\dfrac{n-2}{n}$(3 分)

(3)n=1 時，$a_1=-1,\dfrac{1-2}{1}=-1$，成立(1 分)

設 n=k 時成立(1 分)

則 n=k+1 時

$$a_{k+1}=\frac{1+a_k}{3-a_k}=\frac{1+\frac{k-2}{k}}{3-\frac{k-2}{k}}=\frac{2k-2}{2k+2}=\frac{k-1}{k+1}=\frac{(k+1)-2}{k+1}$$ 也成立

由數學歸納法，得證(4 分)