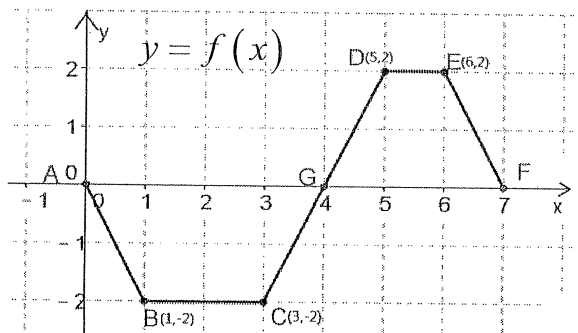


台北市立成功高級中學 102 學年度第二學期高三自然組數學科期末考試題卷

一、多重選擇題(30%，每題 6 分)

1. 下圖為連續函數  $y = f(x)$  的圖形，設  $G(t) = \int_0^t f(x) dx$ ， $0 \leq t \leq 7$ ，請選出正確的選項：

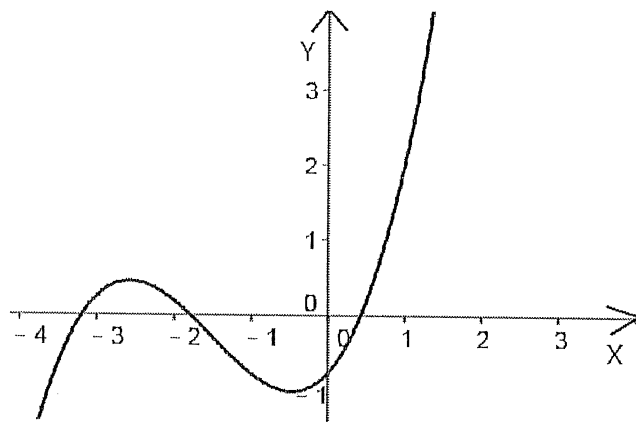


- (1)  $G(4) = 6$  (2)  $G(3) < G(5)$  (3)  $|G(7)| = 10$  (4)  $G'(2) = 0$  (5)  $G''(4) = 2$

2. 設  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  的圖形與直線  $x$  軸、 $y$  軸及  $x = 4$  所圍成的區域為  $R$ 。將區間  $[0, 4]$  平分  
成  $n$  等分，區域  $R$  的下和為  $L_n$ ，上和為  $U_n$ ，選出正確的選項：(1)  $U_{10} \leq U_{40}$  (2)  $L_{10} \leq L_{40}$   
(3)  $U_{40} \geq L_{100}$  (4)  $L_4 = 6$  (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{26}{3}$

3. 已知函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的函數圖形如下，則下列選項有哪些是正確的？

- (1)  $f(x) = 0$  有三個相異實根  
(2)  $f(x) - 2 = 0$  有一負根兩虛根  
(3)  $f(x+1) = 0$  有一正根兩負根  
(4)  $f(x^2) = 0$  恰有兩相異實根  
(5) 方程式  $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  有一個大於 1 的正根及兩負根



4. 已知  $f(x)$  為定義在所有實數的實係數多項式函數，下列敘述何者正確？

- (1) 若  $\deg f(x) = 4$ ，則  $f(x)$  必有極值  
(2) 若有一實數  $c$  滿足  $f'(c) = f''(c) = 0$ ，則  $f(x)$  在  $x = c$  處沒有極值  
(3) 若  $f(x)$  在  $x = c$  處有極值，則  $f'(c) = 0$  且  $f''(c) \neq 0$

(4) 若  $f'(c)=0$ ，且  $f''(c)\neq 0$ ，則  $f(c)$  必為極值

(5)  $f(x)$  的極小值可能會大於  $f(x)$  的極大值

5. 如下圖所示， $y=f(x)$  為三次實係數多項式函數，則下列哪些選項是正確的？

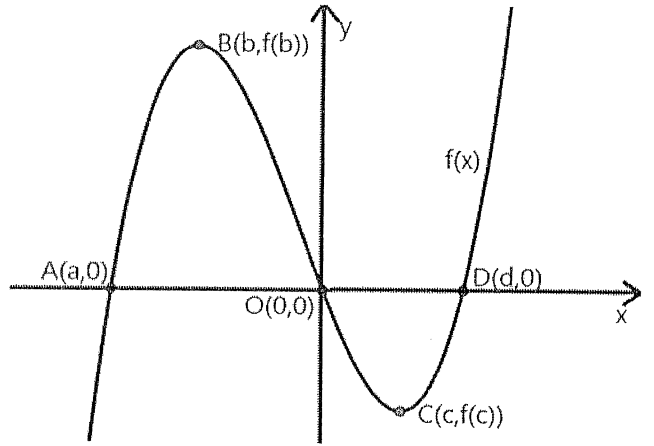
(1) 導函數  $f'(x)$  在區間  $[a,b]$  為遞增函數

(2) 導函數  $f'(x)$  在區間  $[0,d]$  為遞增函數

(3) 導函數  $f'(x)$  在  $x=\frac{b+c}{2}$  有極小值

(4)  $F(t)=\int_a^t f(x)dx$  在  $t=0$  有極小值

(5)  $F(t)=\int_a^t f(x)dx$  在區間  $[b,0]$  為遞減函數



二、填充題(50%，每格 5 分)

1. 求下列定積分之值：

(1)  $\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $\int_1^5 [\log_2 x] dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(其中  $[ \ ]$  表高斯符號)

2. 求無窮級數和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知  $\int_1^{10} \log x dx = R$ ，求  $\int_0^1 10^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(以  $R$  表示)

4. 設函數  $f(x) = \begin{cases} -ax, & x \leq 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$ ，若  $f'(2)$  存在，則數對  $(a,b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知函數  $f(x) = x^3$  的圖形與直線  $y = x + k$  有三個相異交點，求實數  $k$  的範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 從拋物線  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  外一點  $P(3,1)$  做切線，求切點坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 若  $f'(c) = 0$ ，且  $f''(c) \neq 0$ ，則  $f(c)$  必為極值

(5)  $f(x)$  的極小值可能會大於  $f(x)$  的極大值

5. 如下圖所示， $y = f(x)$  為三次實係數多項式函數，則下列哪些選項是正確的？

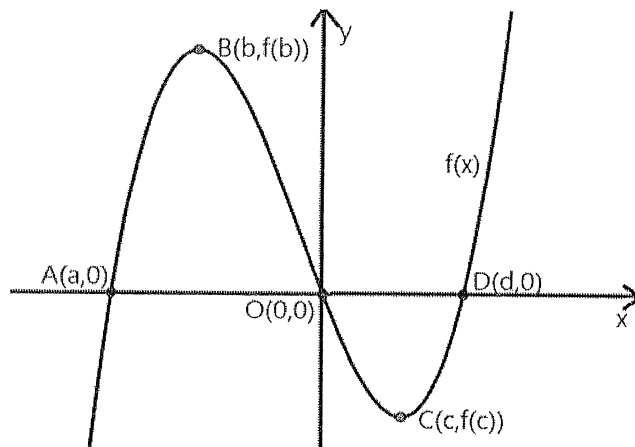
(1) 導函數  $f'(x)$  在區間  $[a, b]$  為遞增函數

(2) 導函數  $f'(x)$  在區間  $[0, d]$  為遞增函數

(3) 導函數  $f'(x)$  在  $x = \frac{b+c}{2}$  有極小值

(4)  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$  在  $t = 0$  有極小值

(5)  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$  在區間  $[b, 0]$  為遞減函數



## 二、填充題(50%，每格 5 分)

1. 求下列定積分之值：

(1)  $\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $\int_1^5 [\log_2 x] dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(其中  $[ \ ]$  表高斯符號)

2. 求無窮級數和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知  $\int_1^{10} \log x dx = R$ ，求  $\int_0^1 10^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(以  $R$  表示)

4. 設函數  $f(x) = \begin{cases} -ax, & x \leq 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$ ，若  $f'(2)$  存在，則數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

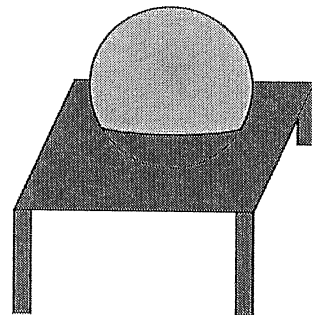
5. 已知函數  $f(x) = x^3$  的圖形與直線  $y = x + k$  有三個相異交點，求實數  $k$  的範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 從拋物線  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  外一點  $P(3, 1)$  做切線，求切點坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 已知點  $P(x, y)$  為拋物線  $y^2 = x$  上動點，點  $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，求  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$  有最小值時  $P$  點的  $x$  座標為\_\_\_\_\_。

8.  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  為三次實係數多項式，已知  $y = f(x)$  的圖形以  $(1, 6)$  為反曲點， $y = f(x)$  在  $x = -1$  實有極值  $-10$ ，求數對  $(a, b, c, d) =$ \_\_\_\_\_。

9. 將一半徑為 5 公分的球，滾入桌面上一個半徑為 4 公分的圓洞中，求這個球在桌面以上部分的體積為\_\_\_\_\_。



三、計算題(20%)(請作答於答案卷上)

1. (1) 函數  $f(x) = x^2$  上一點  $P(2, 4)$ ，直線  $L$  為以  $P$  點為切點的切線，求  $L$  的方程式。

(2) 求出切線  $L$ 、 $x$  軸和  $y = f(x)$  的圖形在第一象限所圍成的區域面積。

2. 請描繪函數  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x + 7$  的圖形，並寫出極值及反曲點。(圖形中需呈現遞增、遞減、凹向)

---

**God does not care about our mathematical difficulties, he integrates empirically.**

~Einstein

譯註：這個世界每一瞬間都在作無窮小量的變化，這是世界的微分；反過來是積分，把無窮小量的變化從過去到現在積分起來，就得到現在世界的樣貌。因此說「上帝老練地用積分在世界上行事」。

~蔡聰明

台北市立成功高級中學 102 學年度第二學期高三自然組數學科期末考答案

一、多重選擇題(每題 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上得零分)

1.	2.	3.	4.	5.
5	2, 3	1, 4, 5	1, 4, 5	2, 3

二、填充題(50%，每格 5 分)

1. (1)	1. (2)	2.	3.
4	4	$\frac{\pi}{4}$	$10-R$
4.	5.	6.	7.
$(a, b) = (-4, 4)$	$\frac{-2\sqrt{3}}{9} < k < \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$(2, -1) \cdot (4, 7)$	$\frac{3}{2}$
8.	9.		
$(-1, 3, 9, -5)$	$\frac{448}{3}\pi$		

三、計算作圖題(20%)

<p>1.</p> <p>(1)</p> $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4 \quad (2\%)$ $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4 \quad (3\%)$ <p>(2)</p> <p><math>L</math> 與 <math>x</math> 軸交 <math>(1, 0)</math> (2%)</p> $\int_0^2 x^2 dx - 2 = \frac{2}{3} \quad (3\%)$	<p>2.</p> $f'(x) = 2x^3 - 6x + 4$ $= 2(x-1)^2(x+2) \quad (2\%)$ $f''(x) = 6x^2 - 6$ $= 6(x+1)(x-1) \quad (1\%)$ <p>圖形(3%)</p> <p>極小值-5 (2%)</p> <p>反曲點 <math>(-1, \frac{1}{2})</math>、<math>(1, \frac{17}{2})</math> (2%)</p>	
---	---	--