臺北市立成功高級中學第 102 學年度高二下學期數學科期中考試題

超過 100 分,以 100 分計

一、 填充題：一類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 6 分(85%)；

二三類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 5 分(79%)。

1、包含 $A(1,1,0)$，$B(-2,2,1)$，$C(1,2,2)$ 三點的平面方程式為＿(A)＿。

2、求包含兩平行線 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{1}$ 的平面方程式為＿(B)＿。

3、假設 A、B、C 均表示 n 階方陣，I 為 n 階單位方陣，則下列敘述何者正確? ＿(C)＿。(全對才給分)

(1) $AC-BC=C(A-B)$ (2) $A^2-I^2=(A+I)(A-I)$ (3)若 $C^2=I$，則 $C=I$ 或 $C=-I$

(4) $(AB)C=A(BC)$ (5)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$。

4、已知方程組之增廣矩陣為 $\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&3&4&-4\\3&4&5&-7\end{bmatrix}$，經由列運算簡化為 $\begin{bmatrix}1&2&\alpha&-1\\0&-1&\beta&-2\\0&0&\gamma&0\end{bmatrix}$，

則 $\alpha+\beta+\gamma$ 之值為＿(D)＿。

5、已知 $A=\begin{bmatrix}1&2\\5&4\\-3&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，且 $AB+3C=O$（零矩陣），若矩陣 $C=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，

則 $a+e+f$ 之值為＿(E)＿。

6、若直線 L 之兩面式為 $L:\begin{cases}x-3y+7z=8\\2x+5y-8z=5\end{cases}$，利用高斯消去法轉換成參數式表示為 $L:\begin{cases}x=at+b\\y=ct+d\,,t\in\mathbb{R}\\z=2t+3\end{cases}$，

則 $a+b+c+d$ 之值為＿(F)＿。

7、三平面方程式為 $E_1:2x-3y+z=4$，$E_2:x+y+z=2$，$E_3:4x-y+3z=1$；請清楚敘述在空間中的圖形表現為＿(G)＿。

8、設 $A=\left[a_{ij}\right]_{4\times4}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases}i^2+j & ,i\neq j\\0 & ,i=j\end{cases}$，則 A 所有元素之和為＿(H)＿。

9、空間中，設點 $P(2,-2,-2)$，直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$，則 P 點在直線 L 上的投影點坐標為＿(I)＿。

10、設矩陣 $A=\begin{bmatrix}4&6\\-2&-3\end{bmatrix}$，若矩陣 $B=A-A^2+A^3-A^4+\cdots-A^{10}$，則矩陣 B 為＿(J)＿。

11、假設 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，若 $(I+\frac{1}{2}A)^4=aI+bA$，則 (a,b) 數對為＿(K)＿。

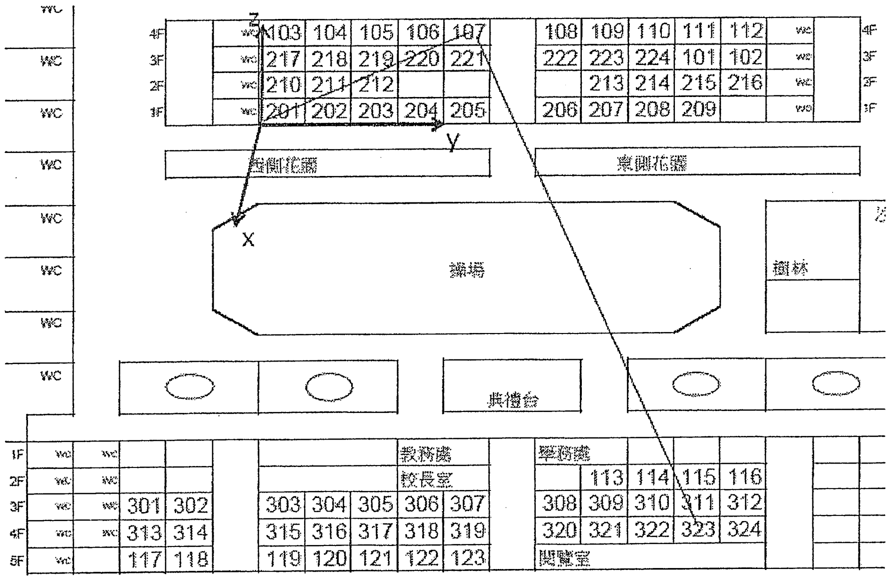
12、平面 $E:ax+by+cz+d=0$ 過 $(1,3,7)$ 分別與三個坐標軸交於第一卦限（即三坐標軸之正向）於 A,B,C 三點，則四面體 $OABC$ 體積最小為＿(L)＿；又此時平面方程式 $E:ax+by+cz+d=0$，在 d 為最小的正整數條件下 $a+b+c+d$ 之值為＿(M)＿。

二、計算題：

一類組做１、２兩題(16%)；二三類做２、３、４三題(24%)。

１、若矩陣 $A=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m & 7\\ 2 & -1 & 1 & n\\ 7 & 1 & 8 & 31\end{array}\right]$ 所對應的方程組之解的圖形表現為三平面共線，求 m,n 之值。(８分)

２、如下圖為本校的教室位置圖，阿華在 201 教室上八德樓四樓 107 找學弟通知社團活動事宜後，又轉往四維樓 323 去找學長請教辦理活動細節的經驗。



今若以 201 為原點，圖示中三組黑箭頭為三座標軸正向（指向四維樓方向為 x 軸，指向求是樓方向為 y 軸，另一向上者為 z 軸）且上升一樓為一單位、每間教室間隔視為一單位（例如 103 至 107 則有 4 個單位）；中間樓梯間隔亦視為一單位（如 107 與 108、307 與 308 之間）；201 至四維樓的最短距離設為十單位。請問操場所在的平面(設為 xy 平面)與阿華走訪的三個點（201,107,323）的平面之夾角餘弦值為何？(8 分)

３、設兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$ 與 $L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$，試求其公垂線方程式與兩直線的距離。(以比例式表示)(8 分)

４、平面過 $(2,-1,0)$ 與 $(3,\sqrt{15}+1,1)$，且與二平面 $E_1:2x-y=4$，$E_2:z=5$ 之兩夾角中，已知有一個角是 60°，另一個是 30°，且三平面無共同交點，試求此平面方程式。(8 分)

臺北市立成功高級中學第 102 學年度高二下學期數學科期中考試題

超過 100 分,以 100 分計　　　　班級______座號______姓名______________

二、 填充題： 一類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 6 分(85%)；

二三類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 5 分(79%)。

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
(F)	(G)	(H)	(I)	(J)
(K)	(L)	(M)		

二、計算題：一類組做１、２兩題**(16%)**；二三類做２、３、４三題**(24%)**。(請標明題號)

臺北市立成功高級中學第 102 學年度高二下學期數學科期中考

超過 100 分,以 100 分計

一、填充題：一類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 6 分(85%)；

二三類組答對格數前 7 格，每格 7 分；7 格以上者，每格 5 分(79%)。

(A) $x+6y-3z=7$	(B) $5x-6y-3z=2$	(C) 2，4	(D) 1	(E) -4
(F) 9	(G)兩兩交於一直線，三直線兩兩平行	(H) 120	(I) $(2,0,-1)$	(J) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
(K) $(1,\frac{15}{2})$	(L) $\frac{189}{2}$	(M) $\frac{32}{63}$		

二、計算題：一類組做１、２兩題(16%)；二三類做２、３、４三題(24%)。

1.（8%）

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&m&7\\2&-1&1&n\\7&1&8&31\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&m&7\\0&-3&-2m+1&-14+n\\0&-6&-7m+8&-18\end{array}\right]$$

則 $\dfrac{-3}{-6}=\dfrac{-2m+1}{-7m+8}=\dfrac{-14+n}{-18}$

$\boxed{m=2,n=5}$

2.（8%）

假設 201、107、323 教室分別為

$A(0,0,0)$，$B(0,4,3)$，$C(10,9,3)$ 三點

$\overrightarrow{AB}=(0,4,3)$

$\overrightarrow{AC}=(10,9,3)$

$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-15,30,40)//(3,-6,-8)$

則平面 $E_1:3x-6y-8=0$

操場 $E_2:z=0$

$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\theta$

$-8=\sqrt{109}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{8}{\sqrt{109}}$

$\therefore$ 餘弦值為 $\boxed{\pm\dfrac{8}{\sqrt{109}}}$

3.（8%）

設 $P\in L_1:\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$，$\overrightarrow{u_1}=(4,-3,-1)$

$Q\in L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$，$\overrightarrow{u_2}=(3,-4,-2)$

$P(11+4t,-5-3t,-7-t),t\in R$，

$Q(-5+3s,4-4s,6-2s),s\in R$

$\overrightarrow{PQ}=(3s-4t-16,-4s+3t+9,-2s+t+13)$

$\because\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_1}=0$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$

得 $\begin{cases}26s-26t=104\\29s-26t=110\end{cases}\Rightarrow t=-2,s=2$

$\Rightarrow P(3,1,-5)$，$Q(1,-4,2)$，$\boxed{\overline{PQ}=\sqrt{78}}$，

$\overrightarrow{PQ}=(-2,-5,7)//(2,5,-7)$

公垂線方程式 $\boxed{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-2}{-7}}$

(也可寫成：$\boxed{\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+5}{-7}}$)

4.（8%）

三平面之夾角分別為 90° 60° 30°，故兩兩交一直線，則 E_1 E_2 之交線必平行於所求平面。

因此

$\overrightarrow{n_1}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-1,-2,0)//(1,2,0)$

$(2,-1,0)$，$(3,\sqrt{15}+1,1)$ 兩點在所求平面上，所成向量為：$(1,\sqrt{15}+2,1)$

$(1,2,0)\times(1,\sqrt{15}+2,1)=(2,-1,\sqrt{15})$ 即為所求法向量，所求平面為 $\boxed{2x-y+\sqrt{15}z=5}$。