台北市立成功高中102學年度第二學期三年級數學科第一次期中考試題卷(自然組)

一、多重選擇題：(每題8分，共16分。每題錯一個選項得5分，錯二個選項得2分，其餘該題以0分計算)

1. 下列哪些函數在$x=0$處連續？(其中[ ]表示高斯函數)

(1) $f_1(x)=|x|$ (2) $f_2(x)=\dfrac{|x|}{x}$ (3) $f_3(x)=\dfrac{1}{x}$ (4) $f_5(x)=[x]$ (5) $f_5(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$

2. 已知$f(x)$為三次多項式函數，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$。則下列選項哪些正確？

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[f(x)]^2}{(x-1)(x-2)}=2$ (2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ (3) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$ (4) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}}f(x)=0$ (5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-4}=-10$

二、填充題：(每格5分，共65分)

1. 試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3n^2+5}{1-n^3}-\dfrac{5^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+5^n})=$ ___(A)___ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=$ ___(B)___

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|x|+x}{|x|-2}=$ ___(C)___ (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)^{10}-1}{x-1}=$ ___(D)___

2. 已知函數$f(x)=\begin{cases}x^2+x+3 & ,若x\ge1\\ x+a & ,若x<1\end{cases}$為連續函數，則實數$a=$ ___(E)___。

3. 已知函數$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$與$g(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求$(g\circ f)(x)=$ ___(F)___及$(g\circ f)(x)$的定義域為 ___(G)___。

4. 設數列$\left\langle\dfrac{3^{n+1}}{(x-3)^n}\right\rangle$收斂，求$x$之範圍為 ___(H)___。

5. 設$\langle a_n\rangle$為一數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n^2+4}=2$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+a_n}{4n^2-3}=$ ___(I)___。

6. 已知$a_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n^2+4n^3}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ___(J)___。

7. 求$\sum\limits_{k=1}^{10}\left[\dfrac{60}{k+11}\right]=$ ___(K)___。(其中[ ]為高斯符號)

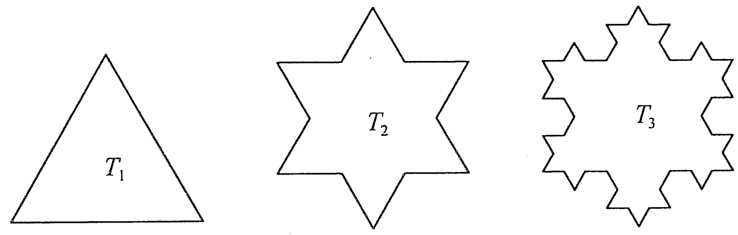
8. 已知函數$f(x)=\begin{cases}x+1 & ,若x<6\\ f(f(x-3)) & ,若x\ge6\end{cases}$，求$f(9)=$ ___(L)___。

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+(2n-1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2n}})=$ ___(M)___。

三、計算證明題：(共 19 分。請寫下計算過程，否則不予計分)

1. 利用數學歸納法證明：對所有自然數n，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{2n}{n+1}$恆成立．(8 分)

2. 設 T_1，T_2，…，T_n，…為一序列多邊形，其作法如下：T_1為邊長等於 1 之正三角形；以 T_n每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去，所得的多邊形為 T_{n+1}，$n=1$，2，3，…（如下圖所示）其形態似雪花，稱為科赫雪花（Koch snowflake）．令 a_n 表 T_n的周長，設$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}, S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ ，試求：



(1) $a_6=$？(3 分)
(2) $S_n=$？(以 n 表示) (3 分)
(3)試求滿足$|S-S_n|<\frac{1}{1000}$的最小正整數 $n=$？($\log 2=0.3010, \log 3=0.4771$)(5 分)

台北市立成功高中 102 學年度第二學期三年級數學科第一次期中考答案卷(自然組)

一、多重選擇題：(每題 8 分，共 16 分。每題錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，其餘該題以 0 分計算)

1	2
(1) (5)	(2) (3) (4) (5)

二、填充題：(每格 5 分，共 65 分)

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-5	$\frac{1}{2}$	0	-10	4
(F)	**(G)**	**(H)**	**(I)**	**(J)**
$\frac{1}{x+2}$	$\mathbb{R}-\{-1,-2\}$	$x\geq 6$ 或 $x<0$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{12}$
(K)	**(L)**	**(M)**		
34	6	$\sqrt{2}$		

三、計算證明題：(共 19 分。請寫下計算過程，否則不予計分)

1.解:

(1)當 n=1 時，左式=1，右式=1 $\therefore$ 原式成立 (2 分)

(2)設 n=k 時原式成立，即$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\geq\frac{2k}{k+1}$ (1 分)

則當 n=k+1 時，左式=$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$

右式=$\frac{2(k+1)}{k+2}$ (1 分)

$\therefore$ 左式$-$右式$\geq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$ (1 分)

$$=\frac{(2k+1)}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}\geq 0$$

$\therefore$ 原式在 n=k+1 時也成立 (2 分)

故由數學歸納法可知:對所有自然數 n，

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{2n}{n+1}$ 恆成立 . (1 分)

2.解:

(1) $a_6=\frac{1024}{81}$ (3 分)

(2) $S_n=\frac{4}{3}[1-(\frac{3}{4})^n]$ (3 分)

(3) $|S-S_n|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{1000}$ (1 分)

$\Rightarrow\log\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<-3$ (1 分)

$\Rightarrow n-1>\frac{3}{\log 4-\log 3}=\frac{3}{0.1249}=24.01\cdots$ (2 分)

$\Rightarrow n\geq 26$ (1 分)

$\therefore$ n 最小為 26 .