臺北市立 成功高中　102 學年度第二學期高三社會組第一次期中考數學試題卷

一、多選題：(每題全對可得 8 分，只錯一個選項可得 5 分，只錯二個選項可得 2 分，其餘得 0 分)

1. 下列各選項中的無窮數列，哪些是收斂數列？

(A) $\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle$　(B) $\left\langle (-1)^n \right\rangle$　(C) $\left\langle 1 \right\rangle$　(D) $\left\langle \dfrac{5n}{n^2+2} \right\rangle$　(E) $\left\langle \dfrac{n^2+n+2}{100n+3} \right\rangle$

2. 下列各選項中的無窮級數，哪些是收斂級數？

(A) 無窮等比級數$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots$

(B) 無窮等比級數$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots$

(C) 無窮等比級數$1+1+1+1+\cdots$

(D) 無窮等比級數$1-1+1-1+\cdots$

(E) 無窮級數$\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{25}+\dfrac{7}{125}+\cdots+\dfrac{2^n-1}{5^n}+\cdots$

二、填充題：(每格 5 分，共 70 分)

1. 試求下列各極限的值，若極限不存在，則回答「不存在」：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}=$ ___(A)___ 。　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+2}-\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)=$ ___(B)___ 。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n\cdot(n+1)}=$ ___(C)___ 。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right]=$ ___(D)___ 。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=$ ___(E)___ 。

(6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=$ ___(F)___ 。　　(7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x+1|}{x+1}=$ ___(G)___ 。

2. 已知數列$\langle a_n \rangle$為收斂數列，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-1}{5a_n+2}=\dfrac{1}{2}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ___(H)___ 。

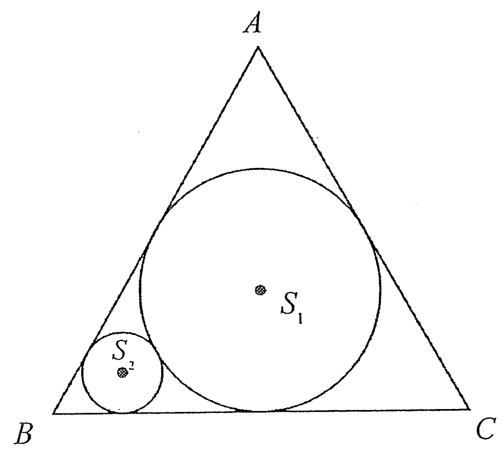
3. 設一無窮等比級數的首項為 a，公比為 r，其中 a、r 均為實數，若此級數的和為 3，且其各項平方的和為$\dfrac{9}{2}$，則數對$(a,r)=$ ___(I)___ 。(全對才給分)

4. 設 a, b, c 為正整數，且 $1<a<b<c<9$，若一無窮等比級數的前三項為 $0.\overline{a}$，$0.0\overline{b}$，$0.00\overline{c}$，則此級數的和為 __(J)__ 。

5. 函數 $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ 的值域為 __(K)__ 。

6. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a, & 若\ x>1 \\ x+4 \quad\quad , & 若\ x\le 1 \end{cases}$ 為連續函數，則實數 a 的值為 __(L)__ 。

7. 如圖，正三角形 ABC 中，圓 S_1 為其內切圓，圓 S_2 與 $\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$ 、圓 S_1 相切，$\cdots$，圓 S_k 與 $\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$ 、圓 S_{k-1} 相切，$\cdots$，若正三角形 ABC 的邊長為 6，則無窮多個圓 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 面積的總和為 __(M)__ 。



8. 設 x 的多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=12$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-10$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-3}=32$，若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 後所得之商式，則 $g(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 後所得之餘式為 __(N)__ 。

三、證明題：(14 分)

試證明：當正整數 $n\ge 3$ 時，不等式 $3^n\ge n^3$ 恆成立。

臺北市立
成功高中

102學年度第一學期高三社會組第二次期中考數學參考答案

一、多選題：(每題全對可得 8 分，只錯一個選項可得 5 分，只錯二個選項可得 2 分，其餘得 0 分)

1	2
ACD	**ABE**

二、填充題：(每格 5 分，共 70 分)

(A)	(B)	(C)	(D)
$\frac{1}{3}$	1	3	1
(E)	(F)	(G)	(H)
2	-1	不存在	4
(I)	(J)	(K)	(L)
$(2,\frac{1}{3})$	$\frac{5}{18}$	$\left\{y\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le \frac{3}{2}\right\}$	6
(M)	(N)		
$\frac{27}{8}\pi$	x^2+3x+6		

三、證明題：(14 分)

試證明：當正整數 $n\ge 3$ 時，不等式 $3^n\ge n^3$ 恆成立。

證明：

(1) 當 $n=3$ 時，左式 $=3^3=27\ge 3^3=$ 右式　成立　(2 分)

(2) 設 $n=k(k\in\mathbb{N}, k\ge 3)$ 時，$3^k\ge k^3$　成立　(1 分)

當 $n=k+1$ 時，

左式 $=3^{k+1}=3\times 3^k\ge 3\times k^3$　(1 分)

右式 $=(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$　(1 分)

$\because$ 左式 $-$ 右式 $\ge 3k^3-(k^3+3k^2+3k+1)$

$=2k^3-3k^2-3k-1$

$=(k-3)(2k^2+3k+6)+17\ge 0$　$(\because k\ge 3)$　(8 分)

$\therefore$ 左式 $\ge$ 右式　亦成立

(3) 由數學歸納法可知，當正整數 $n\ge 3$ 時，不等式 $3^n\ge n^3$ 恆成立。　(1 分)