

臺北市立成功高級中學 101 學年度第 2 學期高三自然組期中考試題

班級： 座號： 姓名：

一、多重選擇題：(每題 8 分，共 24 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上不給分)

1. 下列各數列，那些數列是收斂數列？

$$(1) \left\langle \frac{30+1}{10n} \right\rangle \quad (2) \left\langle \frac{3^{n+1}+1}{3^n} \right\rangle \quad (3) \left\langle \sin \frac{n\pi}{2} \right\rangle \quad (4) \left\langle \sqrt[n]{3^n+4^n} \right\rangle \quad (5) \left\langle \frac{(-2)^n}{2^{n+2}} \right\rangle。$$

2. 已知函數 $f(x)$ 是偶函數且滿足 $f(x) = \begin{cases} -6x-18 & \text{若 } x > 9 \\ |x|-x^2 & \text{若 } 2 \leq x \leq 9 \\ \sqrt{4-x} & \text{若 } 0 \leq x < 2 \end{cases}$ ，則下列選項何者正確？

$$(1) f(f(0)) = 2 \quad (2) f(f(3)) = -30 \quad (3) y = f(x) \text{ 的圖形對稱於原點} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ 不存在}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 9} f(x) \text{ 不存在。}$$

3. 下列各選項中的函數在 $x=0$ 時，函數值定義為 $f(0)=0$ ，則那些選項中的函數在 $x=0$ 是連續的？

$$(1) f(x) = |x| \quad (2) f(x) = x - [x] \quad (3) f(x) = \sin x \quad (4) f(x) = \frac{|x|^3 + x^3}{x} \quad (5) f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|}。$$

二、填充題：(每格 6 分，共 60 分，請將答案化至最簡)

1. 設 $a_n = \frac{2^n}{(2+r)^{n+2}}$ ，若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 r 的範圍是 (1)。

2. 試計算 $0.\overline{27} + 1.6\overline{36} =$ (2)。

3. 已知函數 $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 2x - 3)$ 、 $g(x) = 2x - 3$ ，則求函數 $(f \circ g)(x)$ 的定義域(集合) = (3)。

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} = 1$ ，試求數對 $(a, b) =$ (4)。

5. 求曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 的切線中，斜率最小的切線方程式為 (5)。

6. 設曲線 $y = ax^2$ 在點 $(1, a)$ 處的切線與直線 $2x - y - 6 = 0$ 平行，則 $a =$ (6)。

7. 已知函數 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-4}$ ，試求 $f'(3) =$ (7)。

8. 已知函數 $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 5)(x^3 + 2x^2 - 4x + 3)$ ，試求 $f'(1) =$ (8)。

9. 函數 $f(x) = x^{100} + 1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 (9)。

10. 已知函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時可微，且其導數 $f'(a) = A$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(2x-a) - f(2a-x)}{x-a} =$ (10)。

三、計算證明題：(每題 8 分，共 16 分，須有合理過程才計分)

1. 設 n 為自然數，且 $p \geq -1$ ，試利用數學歸納法證明：不等式 $(1+p)^n \geq 1+np$ ，對所有自然數皆成立。

2. 已知函數 $f(x), g(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + g(x)) = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2g(x)) = 1$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot g(x)) = ?$

臺北市立成功高級中學 101 學年度第 2 學期高三自然組期中考答案卷

班級： 座號： 姓名：

一、多重選擇題：(每題 8 分，共 24 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上不給分)

1.	2.	3.

二、填充題：(每格 6 分，共 60 分，請將答案化至最簡)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三、計算證明題：(每題 8 分，共 16 分，須有合理過程才計分)

1. 設 n 為自然數，且 $p \geq -1$，試利用數學歸納法證明：不等式 $(1+p)^n \geq 1+np$，對所有自然數皆成立。	2. 已知函數 $f(x), g(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + g(x)) = 1$ 與 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2g(x)) = 1$，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot g(x)) = ?$
---	--

臺北市立成功高級中學 101 學年度第 2 學期高三自然組期中考答案卷

班級： 座號： 姓名：

一、多重選擇題：(每題 8 分，共 24 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上不給分)

1.	2.	3.
124	24	134

二、填充題：(每格 6 分，共 60 分，請將答案化至最簡)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$r < -4$ or $r \geq 0$	$\frac{21}{11}$	$\{x x > 3, x \in \mathbb{R}\}$	$(4, 8)$	$y = -3x + 3$
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	-2	-15	$100x - 98$	$3A$

三、計算證明題：(每題 8 分，共 16 分，須有合理過程才計分)

1. 設 n 為自然數，且 $p \geq -1$，試利用數學歸納法證明：不等式 $(1+p)^n \geq 1+np$，對所有自然數皆成立。	2. 已知函數 $f(x), g(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + g(x)) = 1$ 與 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2g(x)) = 1$，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot g(x)) = ?$
$n=1$ 時，左 $= (1+p)^1 = 1+p =$ 右，原式成立。(1 分) 設當 $n=k$ 時，原式成立；即 $(1+p)^k \geq 1+kp$ (1 分) 則當 $n=k+1$ 時， 左 $= (1+p)^{k+1} = (1+p)^k (1+p)$ $\geq (1+kp)(1+p)$ $= 1 + (k+1)p + kp^2$ $\geq 1 + (k+1)p =$ 右 (5 分) 故由數學歸納法原理，原不等式對於所有自然數 n 皆成立 (1 分) 證明不等式之過程中有錯誤請各位老師酌予扣分	$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} [2(2f(x) + g(x)) + (f(x) - 2g(x))]$ $= \frac{1}{5} [2 \lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + g(x)) + \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2g(x))]$ $= \frac{1}{5} (2 \times 1 + 1) = \frac{3}{5}$ (3 分) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} [(2f(x) + g(x)) - 2(f(x) - 2g(x))]$ $= \frac{1}{5} [\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + g(x)) - 2 \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2g(x))]$ $= \frac{1}{5} (1 - 2 \times 1) = -\frac{1}{5}$ (3 分) 故 $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot g(x))$ $= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{25}$ (2 分) 學生直接令 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \beta$ 而答案正確，扣 4 分