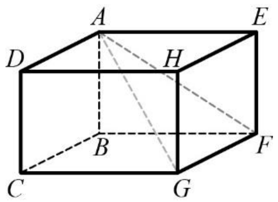
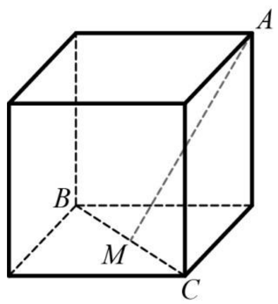
高二數學４Ａ　補考範圍"參考"題目

1. 下圖是一個長方體，*EFGH* 是一個正方形。已知 $\overline{AF}=6, \overline{AG}=7$，求正方形 *EFGH* 的面積。



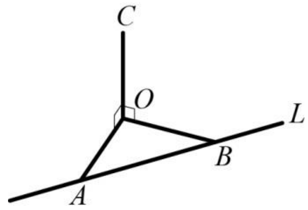
Ans: 13

２.右圖是一個正立方體，且 *M* 為 $\overline{BC}$ 的中點。
已知正立方體的邊長為 2，求 $\overline{AM}$ 的長度。



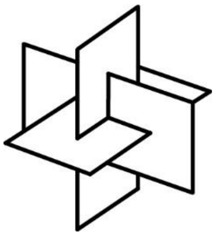
Ans: $\sqrt{6}$

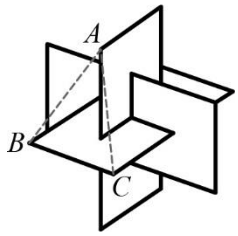
３.如右圖，A, B 為直線 *L* 上兩點，*O* 為 *L* 外一點，直線 *CO* 垂直平面 *OAB* 於 *O* 點。已知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5, \overline{AB}=8$，求 *C* 點到直線 *L* 的最短距離。



Ans: $\sqrt{34}$

４. 用三片長為 4、寬為 2 的矩形，互相垂直且相交形成下圖，其中三片矩形的共同交點位於各矩形的中心。





已知 A, B, C 為圖中矩形的頂點，求△*ABC* 的面積。

Ans: $\sqrt{5}$

5. 已知空間中三點 $A(1,2,3), B(5,5,3), C(3,3,5)$，$\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 *D* 點，且 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求 x, y 的值。

Ans: $x = \dfrac{3}{8}, y = \dfrac{5}{8}$

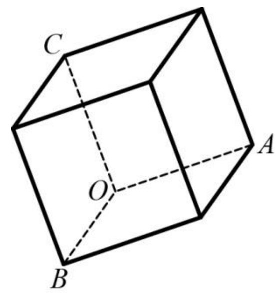
6. 為了美化舞台畫面，燈光師設定一個坐標空間，並從點 $A(0,0,2)$ 朝向點 $B(4,3,1)$ 發射一雷射光束，使得光束恰好射在地面的落水孔上。已知地面所在的平面為 *xy* 平面，求該落水孔的坐標。

Ans: $(8,6,0)$

7. 已知 $A(-1,-2,-3), B(5,-2,3), C(1,0,k)$ 為空間中三點，且△*ABC* 的面積為 9，求 *k* 的值。

Ans: 0 或 -2

8. 右圖是一個正立方體。已知四個頂點的坐標為 $O(0,0,0), A(1,2,2), B(2,-2,1), C(x,y,z)$ ，其中 $z > 0$ ，求 x, y, z 的值。

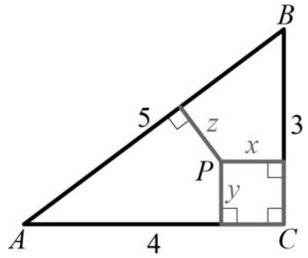


Ans: $x = -2, y = -1, z = 2$

9. 如右圖，直角三角形 *ABC* 的三邊長分別為 $3, 4, 5$，且 *P* 為△*ABC* 內部一點。已知 *P* 點到三邊的距離分別為 x, y, z ，求

(1) $3x + 4y + 5z$ 的值。

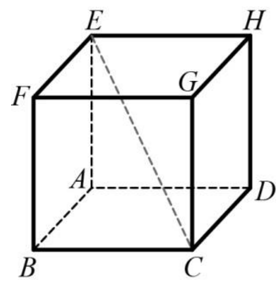
(2) $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值。



Ans: (1) 12 (2) $\dfrac{72}{25}$

１０.右圖是一個邊長為 2 的正立方體，

求$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{CE}$的值。



Ans: 8

１１.已知向量$\overrightarrow{a}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{b}=(3,2,1)$, $\overrightarrow{c}=(x,y,z)$滿足$\left|\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{6}$，求行列式$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\x&y&z\end{vmatrix}$的最大值。

Ans: 24

１２.已知四面體 *O*–*ABC* 的四個頂點坐標為$O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,-1,0)$與$C(0,0,1)$，且過 *O* 點作平面 *ABC* 的垂線交平面於 *H* 點，求

(1) 平面 *ABC* 的方程式。

(2) $\overline{OH}$的長度。

Ans: (1) $x-2y+2z=2$ (2) $\frac{2}{3}$

１３. 已知平面 *E* 通過點$(2,1,-1)$且分別與平面$E_1: 2x+y-z=3$及$E_2: x+2y+z=0$垂直，求 *E* 的方程式。

Ans: $x-y+z=0$

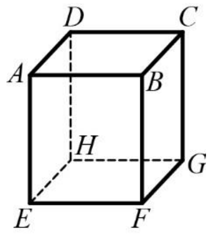
１４. 已知點$A(1,1,-1)$與直線$L: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-5}$皆在平面 *E* 上，求平面 *E* 的方程式。

Ans: $3x+2y+z=4$

１５. 求原點$O(0,0,0)$到直線$L:\begin{cases}x+y=4\\z=1\end{cases}$的距離。

Ans:　3

１６. 在右圖的正立方體中，已知直線$AB:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$與直線$HG:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{2}$，求此正立方體的體積。



Ans:　$54\sqrt{2}$

１７.已知直線 L 為平面$E:x+y-z=1$上的一直線，點$P(1,2,2)$為 L 上距離原點最近的點，且$(a,b,1)$為 L 的一個方向向量，求a,b的值。

Ans:　$a=4,b=-3$

１８.袋中有紅球 2 顆，白球 4 顆。甲、乙兩人依序輪流取球，每次取一球，約定先取到紅球者勝。設每顆球被取到的機率都相等。

(1) 已知球取出後均再放回，求甲在第二次取球時獲勝的機率。

(2) 已知球取出後不放回，求甲獲勝的機率。

Ans:　(1) $\dfrac{4}{27}$　(2) $\dfrac{3}{5}$

１９.某疾病分為兩種類型：第一類型的患者占 80%，使用藥物治療的成功率為 70%；第二類型的患者占 20%，使用藥物治療完全無效。今有一患此疾病的病人使用此藥物治療無效，求該病人患第一類型的機率。

Ans: $\dfrac{6}{11}$

２０.已知聯立方程式$\begin{cases} x-y-2z=3 \\ x+y+z=1 \\ 5x+y+az=b \end{cases}$ 有無窮多組解，求實數a,b的值。

Ans: $a=-1, b=9$

２１.已知二階方陣$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$滿足$2AX=B+3X$ ，求 X。

Ans: $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

２２.(1) 已知二階方陣 A 滿足

$$A\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{且} A\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

求 A。

(2) 承(1)，已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，求a,b,c,d的值。

Ans: (1)$\begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 26 \end{bmatrix}$(2) $a=4, b=-3, c=-9, d=7$

２２. 求將點$P(6,4)$分別作下列各變換後的點坐標：

(1) 以原點為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 3 倍。

(2) 以原點為中心逆時針旋轉 30°。

(3) 對過原點且斜角為-30°的直線鏡射。

(4) 水平推移 y 坐標的$\dfrac{1}{2}$倍。

Ans: (1) $(12,12)$ (2) $\left(-2+3\sqrt{3},3+2\sqrt{3}\right)$

(3) $\left(3-2\sqrt{3},-2-3\sqrt{3}\right)$ (4) $(8,4)$

２３. 在坐標平面上，已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & -8\end{bmatrix}$ 將直線 $L:3x-2y=1$ 變換到一條斜率為 2 的直線，求實數 *a* 的值。

Ans:14

２４.如圖，正三角形 *PQR* 的中心為原點 *O*，頂點 $P(2,-2)$，*Q* 點在第一象限上，求 *Q* 的坐標。

Ans: $\left(-1+\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)$

２５.有甲、乙兩支瓶子，分別裝有 120 毫升與 180 毫升的水。每一輪操作如下：

先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶；

再將乙瓶的水倒出一半回甲瓶。

設 *n* 輪操作後，甲、乙兩瓶分別有 a_n 與 b_n 毫升的水，且二階轉移矩陣 *A* 滿足

$$\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{bmatrix}。$$

(1) 求轉移矩陣 *A*。

(2) 求 a_2 的值。

(3) 已知重複持續操作下去甲、乙兩瓶的水量會趨近穩定狀態，求在穩定狀態時甲瓶的水量。

Ans: (1) $\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (2) 195 (3) 200 毫升