

臺北市立成功高級中學 110 學年度第 1 次教師甄選 數學科試題 A

作答說明：

※ 共 12 題，1 至 8 每題 7 分，9 至 12 題每題 11 分，共 100 分。請在 A4 空白紙上標明題號，並寫下計算和證明過程。

- 試求 $(x-1)^{100}$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式。 【0】
- 試將 $1 + \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ 化成極式。 【 $2 \cos \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$ 】
- 假設一袋中有 18 個白球，2 個紅球，自袋中每次取出一球且取後不放回，直到取出所有紅球為止。令隨機變數 X 表示所取出的球數，試求 X 的期望值。 【14】
- 設一袋中有編號由 1 到 9 的球共 9 顆，每次取出一球後放回袋中，取球 n 次，令 P_n 為此 n 個號碼和為偶數的機率，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 的值。 【 $\frac{1}{2}$ 】
- 若 a, b, c 為正數，證明 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} > \sqrt{c^2 + a^2}$
- 空間中有一四面體，6 個稜長中有 5 個為 6，1 個為 x ，另一個體積相同的四面體，6 個稜長中 4 個為 6，2 個為 x ，且兩個稜長為 x 的邊不相鄰，試求 x 之值為_____
【6 或 $3\sqrt{6}$ 】
- \vec{a}, \vec{b} 兩非零向量， $|\vec{a}| = 4$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，試求 $|2\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b}|$ 之最大值 【 $\frac{4\sqrt{39}}{3}$ 】
- 設三次函數 $f(x) = (x + \alpha)(x + 2)(x + \beta)$ ，其中 $\alpha > 2 > \beta > 0$ ，與 x 軸圍成兩個封閉區域，面積為 A_1, A_2 ，而 $y = f(x)$ 與 x 軸、 y 軸圍成區域面積為 A_3 ， $A_1 = A_2 = A_3$ ，求 $(\alpha, \beta) =$ 【 $(2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ 】
- 試寫出微積分第一基本定理並證明之。
- 在教學「算幾不等式」概念時，你會如何引入？
並舉例說明利用算幾不等式解題時，常見的錯誤類型。
- 設正整數 a, b, c 滿足 $(ab, c) = 1$ ，試證：方程式 $x^a + y^b = z^c$ 有無窮多組正整數解。
- 108 新課綱中，直線與圓移到高一上學期，試以高一同學的先備知識為基礎，證明：點 $P(s, t)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離 $d(P, L) = \frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

臺北市立成功高級中學 110 學年度第 1 次教師甄選 數學科試題

1. 0	2. $2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$	3. 14
4. $\frac{1}{2}$	5. 略	6. 6 或 $3\sqrt{6}$
7. $\frac{4\sqrt{39}}{3}$	8. $(2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$	9. 略
10. 略	11. 略	12. 略